Modulprüfung

Statik starrer Körper

9. März 2022

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

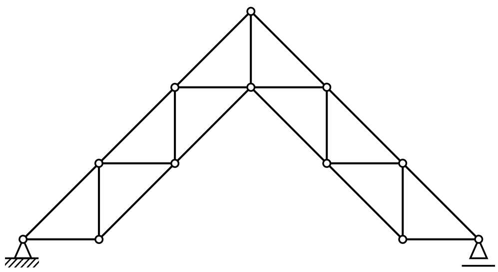
Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						
Korrektor						

(Eintrag erfolgt durch Institut)

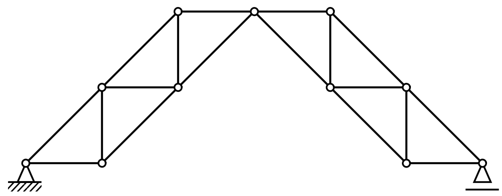
1. Aufgabe: (ca. 15 % der Gesamtpunkte)

1.1

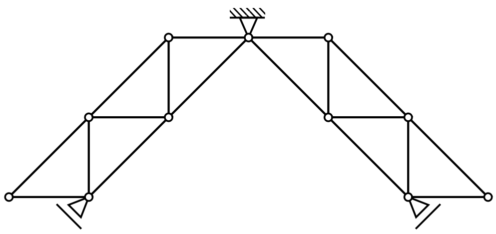
I



II



III



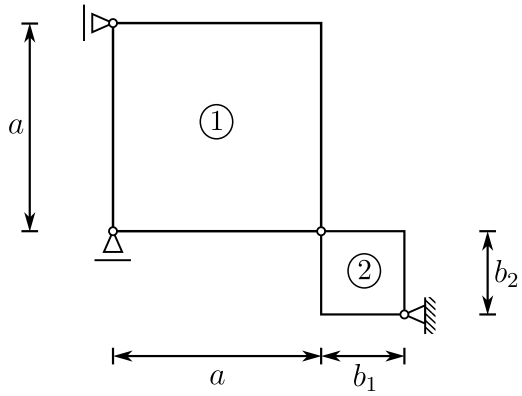
Gegeben seien die dargestellten drei Fachwerke I, II und III. Bearbeiten Sie folgende Aufgabenteile:

a) Ermitteln Sie für welche(s) Fachwerk(e) die Abzählformel (notwendige Bedingung) für statische Bestimmtheit erfüllt ist.

b) Welche(s) Fachwerk(e) sind statisch bestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort **ausführlich**.

c) Fügen Sie in Fachwerk II **einen** Stab hinzu, sodass das System statisch bestimmt wird/bleibt.

1.2



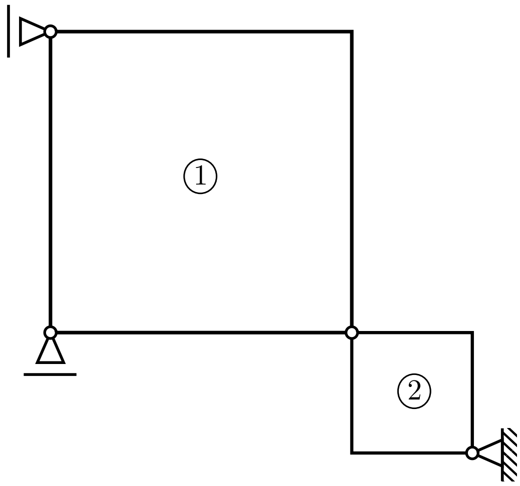
Gegeben sei das abgebildete Tragwerk, welches aus den über ein Gelenk verbundenen starren Körpern ① und ② besteht.

a) Prüfen Sie, ob das System für $b_1 = b_2$ statisch bestimmt ist. Verwenden Sie hierfür die Abzählformel sowie einen Polplan. Benutzen Sie für den Polplan die beigefügte Vorlage.

b) Was muss für die gegebenen Parameter gelten, damit das System unbeweglich ist?

Geg.: a, b_1, b_2

Vorlage zu Aufgabe 1.2:



Musterlösung - Aufgabe 1
1.1

a) Es gilt:

   - Alle drei Tragwerke sind Fachwerke ⇒ Abzählformel für Fachwerke $2k = a + s$
   - I: k = 12, a = 3, s = 21 ⇒ 2k = 24 = a+s
     II: k = 11, a = 3, s = 18 ⇒ 2k = 22 ≠ a+s= 21
     III: k = 11, a = 4, s = 18 ⇒ 2k = 22 = a+s

   ⇒ Notwendige Bedingung für Fachwerk I und III erfüllt

b) System I:

   - Fachwerk nach Aufbauprinzip (abbaubar)
   - System nicht kinematisch gelagert

     ⇒ System ist statisch bestimmt

- System II:

   - Notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit (Abzählformel) nicht erfüllt

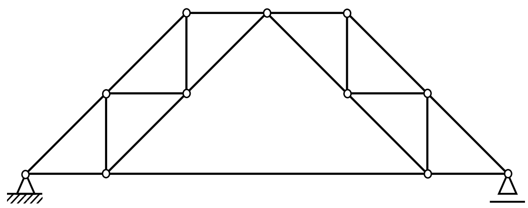
     ⇒ System ist nicht statisch bestimmt

- System III:

   - System ist kinematisch gelagert → Wirkungslinien der Lager schneiden sich in einem Punkt → System ist verdrehbar

     ⇒ System ist nicht statisch bestimmt

c)

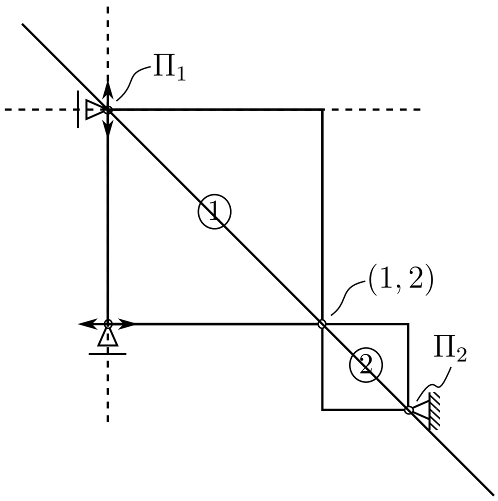


1.2

a)

$$\begin{aligned} f &= 3 \cdot \overbrace{n}^{2} - (\overbrace{r}^{4} + \overbrace{v}^{2}) \\ &= 0 \, \text{(notwendige Bedingung)} \end{aligned}$$

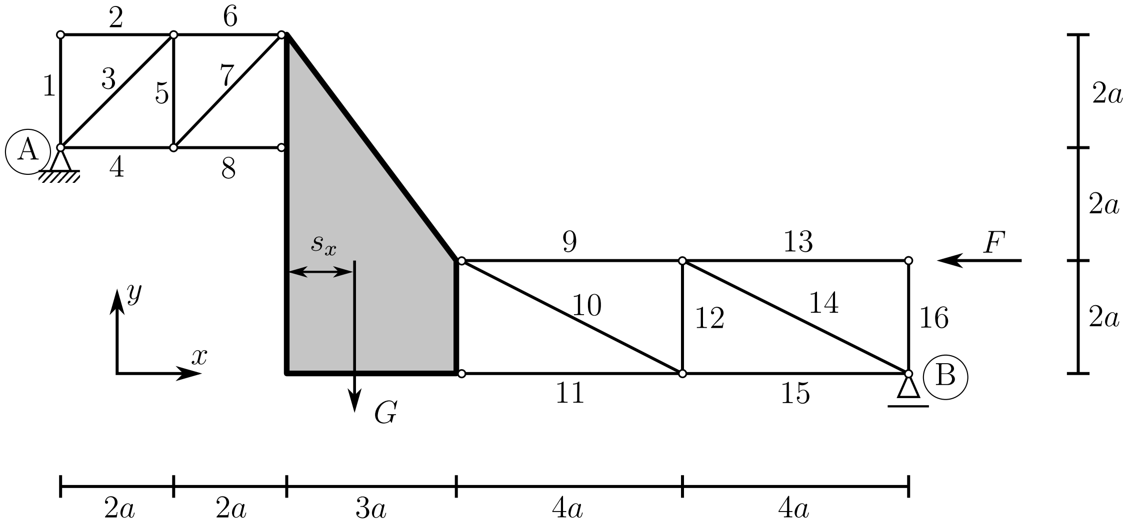
Polplan:



Π_1, $(1, 2)$ und Π_2 liegen auf einer Geraden
$\Rightarrow$ System ist kinematisch!

b) $b_1 \neq b_2$

2. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte Tragwerk wird durch die Kraft F und durch die Gewichtskraft G (im Schwerpunkt der starren Scheibe) belastet.

a) Beurteilen Sie das Tragwerk hinsichtlich der statischen Bestimmtheit. Begründen Sie **ausführlich**.

b) Kennzeichnen Sie die Nullstäbe, sofern welche vorhanden sind, und begründen Sie Ihre Wahl.

c) Weisen Sie nach, dass für die Schwerpunktkoordinate s_x der Scheibe gilt: $s_x = \frac{5}{4}a$.

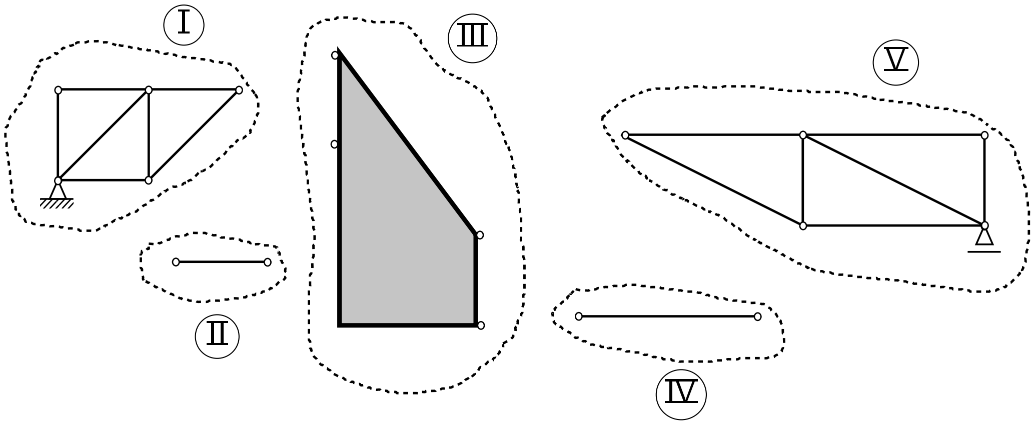
d) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in A und B für den Fall $s_x = \frac{5}{4}a$.

e) Bestimmen Sie die Stabkräfte S_3, S_4, S_{11} und S_{12}.

Geg.: a, F, G

Musterlösung - Aufgabe 2

a)

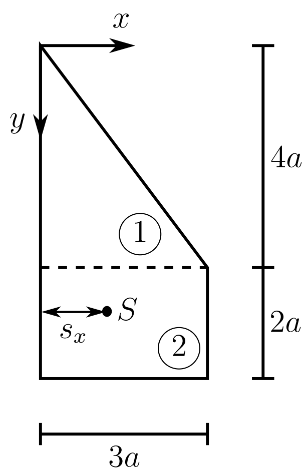


- notwendige Bedingung:
  $n = 5,\ g = 12,\ a = 3 \Rightarrow 3 \cdot n = 15 = a + g$ oder
  $n = 3,\ g = 6,\ a = 3 \Rightarrow 3 \cdot n = 9 = a + g$
- hinreichende Bedingung:
  Das Tragwerk besteht aus zwei Fachwerken gemäß dem Aufbauprinzip und einer starren Scheibe und ist auf jeder Seite über 1 Gelenk und einen Stab starr miteinander verbunden.
  System ist nicht kinematisch gelagert.

$\Rightarrow$ System ist statisch bestimmt.

b)
- S_1 und S_2: unbelasteter Zweischlag
- S_{16}: belasteter Zweischlag, Kraft wirkt in Richtung des Stabes S_{13}

c)



Flächeninhalt der Teilflächen:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 3a = 6a^2$$
$$A_2 = 2a \cdot 3a = 6a^2$$

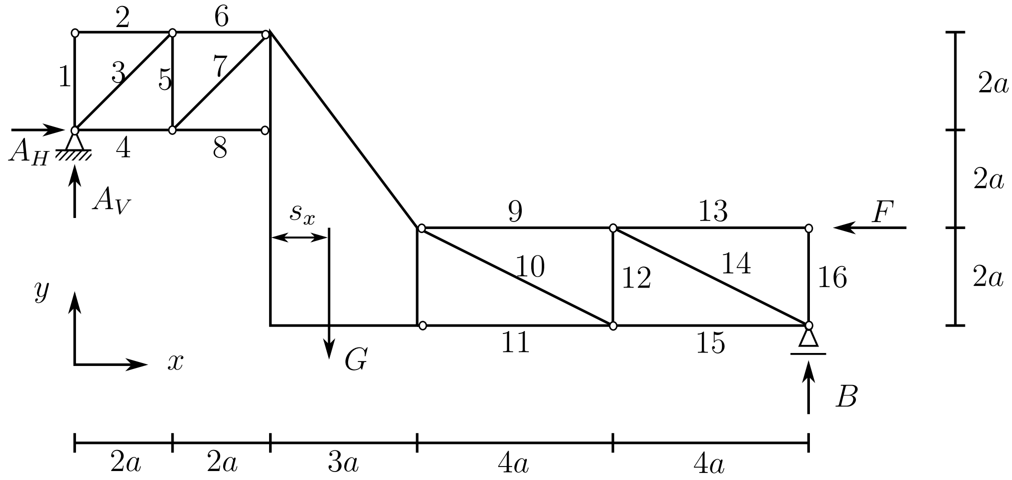
Schwerpunkt der Teilflächen:

$$x_{s1} = \frac{1}{3} \cdot 3a = a$$
$$x_{s2} = \frac{1}{2} \cdot 3a = \frac{3}{2}a$$

Schwerpunktkoordinate:

$$s_x = \frac{\sum x_i A_i}{A_i} = \frac{a \cdot 6a^2 + \frac{3}{2}a \cdot 6a^2}{6a^2 + 6a^2} = \frac{5}{4}a$$

d) – Freischnitt



– Gleichgewicht am Gesamtsystem

$$\sum F_{ix} = 0 : A_H = F$$

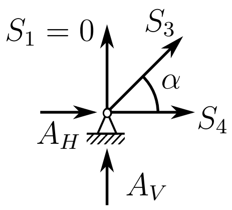
$$\sum M_i^A = 0 : B \cdot 15a - F \cdot 2a - G \cdot \frac{21}{4}a = 0$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{2}{15}F + \frac{7}{20}G$$

$$\sum F_{iy} = 0 : A_V + B - G = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_V = G - \frac{2}{15}F - \frac{7}{20}G = -\frac{2}{15}F + \frac{13}{20}G$$

e) – Knotenpunktverfahren:



$$\sin(\alpha) = \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + (2a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\alpha)$$

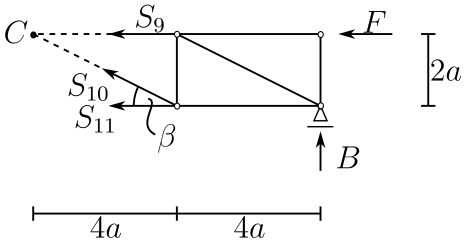
$$\sum F_{iy} = 0 : A_V + S_3 \sin(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \quad S_3 = -\sqrt{2}\left(-\frac{2}{15}F + \frac{13}{20}G\right) = \frac{2\sqrt{2}}{15}F - \frac{13\sqrt{2}}{20}G$$

$$\sum F_{ix} = 0 : S_4 + S_3 \cos(\alpha) + A_H = 0$$

$$\Rightarrow \quad S_4 = -\left(\frac{2\sqrt{2}}{15}F - \frac{13\sqrt{2}}{20}G\right)\frac{1}{\sqrt{2}} - F = -\frac{17}{15}F + \frac{13}{20}G$$

– Ritterschnitt:



$$\sin(\beta) = \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + (4a)^2}} = \frac{2a}{\sqrt{20a}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sum M_i^C = 0 : B \cdot 8a - S_{11} \cdot 2a = 0$$

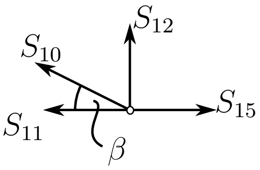
$$\Rightarrow \quad S_{11} = 4 \cdot \left(\frac{2}{15}F + \frac{7}{20}G\right) = \frac{8}{15}F + \frac{7}{5}G$$

$$\sum F_{iy} = 0 : B + \sin(\beta) \cdot S_{10} = 0$$

$$\Rightarrow \quad S_{10} = -\sqrt{5}\left(\frac{2}{15}F + \frac{7}{20}G\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{15}F - \frac{7\sqrt{5}}{20}G$$

alternativ S_{14} berechnen

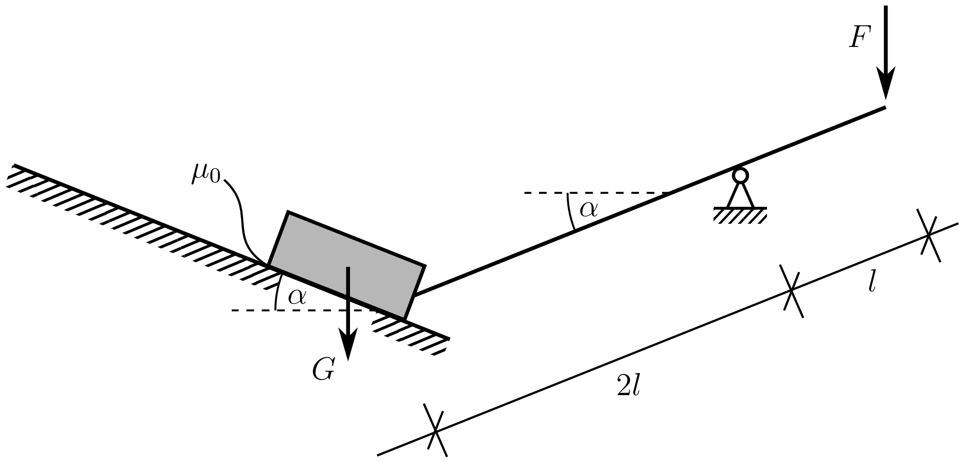
– Knotenpunktverfahren:



$$\sum F_{iy} = 0 : S_{12} + \sin(\beta) \cdot S_{10} = 0$$

$$\Rightarrow \quad S_{12} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}F - \frac{7\sqrt{5}}{20}G\right) = \frac{2}{15}F + \frac{7}{20}G$$

3. Aufgabe: (ca. 17 % der Gesamtpunkte)



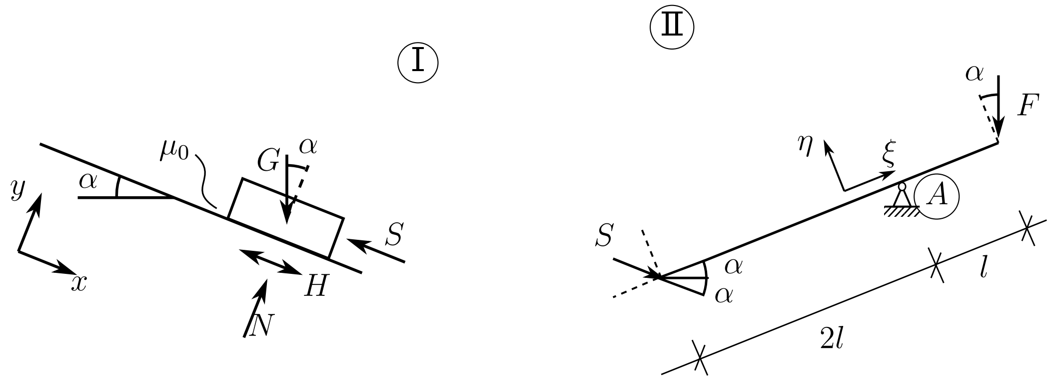
Ein Klotz befindet sich auf einer schiefen Ebene mit dem Haftbeiwert μ_0. Ohne den stützenden Hebel, der den Klotz reibungsfrei berührt, würde er abrutschen.

In welchen Grenzen muss die Kraft F liegen, damit der Klotz nicht rutscht?

Geg.: G, μ_0, α, l

Musterlösung - Aufgabe 3

Freischnitt:



II:

$$\sum \mathrm{M}_i^{\mathrm{A}} = 0 : F \cdot \cos(\alpha) \cdot l = S \cdot \sin(2\alpha) \cdot 2l$$

$$\Rightarrow \quad S = F \frac{\cos(\alpha)}{2\sin(2\alpha)}$$

I:

$$\sum \mathrm{F}_{iy} = 0 : \; N = G \cdot \cos(\alpha)$$

$$\text{Coulomb: } H \leq \mu_0 \cdot N$$

Fallunterscheidung:

1 H in Richtung x-Achse:

$$\sum \mathrm{F}_{ix} = 0 : H + G \cdot \sin(\alpha) - S = 0$$

$$\Rightarrow \quad H = S - G\sin(\alpha) = F \frac{\cos(\alpha)}{2\sin(2\alpha)} - G\sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad F \frac{\cos(\alpha)}{2\sin(2\alpha)} - G\sin(\alpha) \leq \mu_0 G \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad F \leq G \cdot (2\mu_0 \sin(2\alpha) + 2\sin(2\alpha)\tan(\alpha))$$

2 $-H$ in Richtung x-Achse:

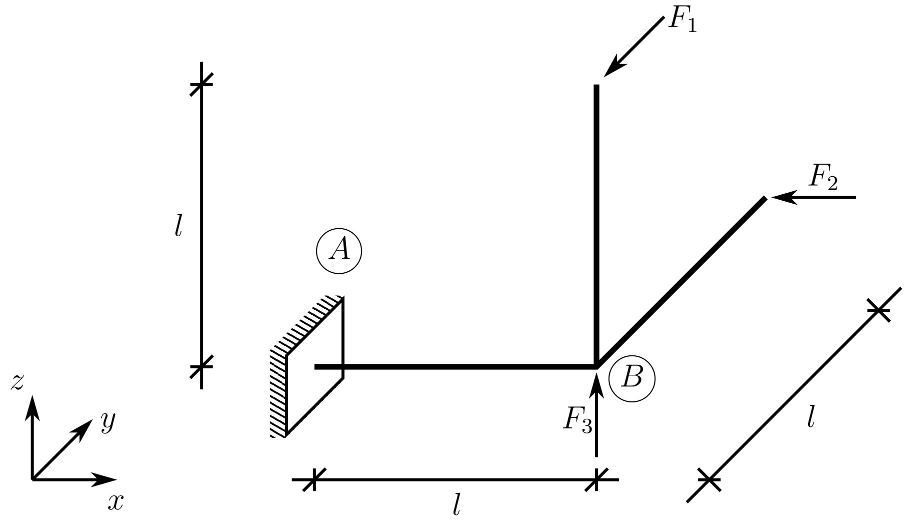
$$\sum \mathrm{F}_{ix} = 0 : \; - H + G \cdot \sin(\alpha) - S = 0$$

$$\Rightarrow \quad H = G\sin(\alpha) - S = G\sin(\alpha) - F \frac{\cos(\alpha)}{2\sin(2\alpha)}$$

$$\Rightarrow \quad G\sin(\alpha) - F \frac{\cos(\alpha)}{2\sin(2\alpha)} \leq \mu_0 G \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad F \geq G \cdot (2\sin(2\alpha)\tan(\alpha) - 2\mu_0 \sin(2\alpha))$$

4. Aufgabe: (ca. 15 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte Tragwerk ist in A eingespannt und wird durch die Kräfte $\boldsymbol{F}_1 = -F_1\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{F}_2 = -F_2\boldsymbol{e}_x$ und $\boldsymbol{F}_3 = F_3\boldsymbol{e}_z$ belastet.

a) Ermitteln Sie, ob das Tragwerk die notwendige Bedingung (Abzählformel) für statische Bestimmtheit erfüllt.
Begründen Sie anschließend **kurz**, ob das Tragwerk statisch bestimmt ist.

b) Skizzieren Sie die Momentenverläufe M_x, M_y und M_z unter Angabe der maßgebenden Ordinaten. Verwenden Sie hierfür den beiliegenden Vordruck und das gegebene **globale** Koordinatensystem. Kennzeichnen Sie insbesondere auch, wenn in einem Bereich ein bestimmtes Moment gleich Null ist.

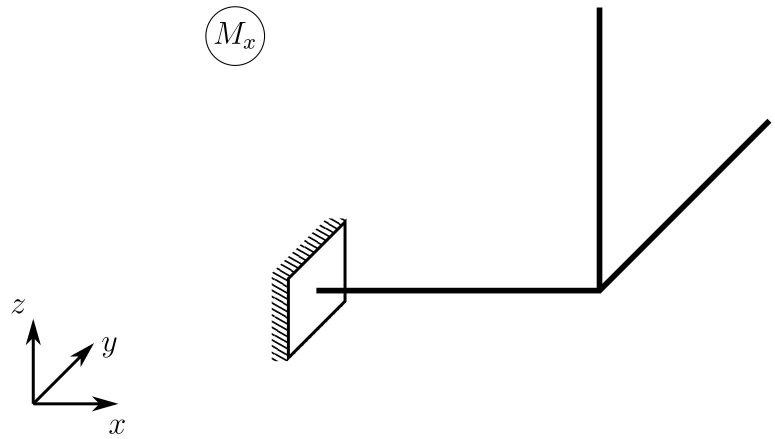
c) Kontrollieren Sie Ihre Lösung aus b), indem Sie die biegesteife Ecke in B freischneiden und alle von Null verschiedenen Momente antragen. Stellen Sie anschließend die Momentengleichgewichtsbedingungen auf.

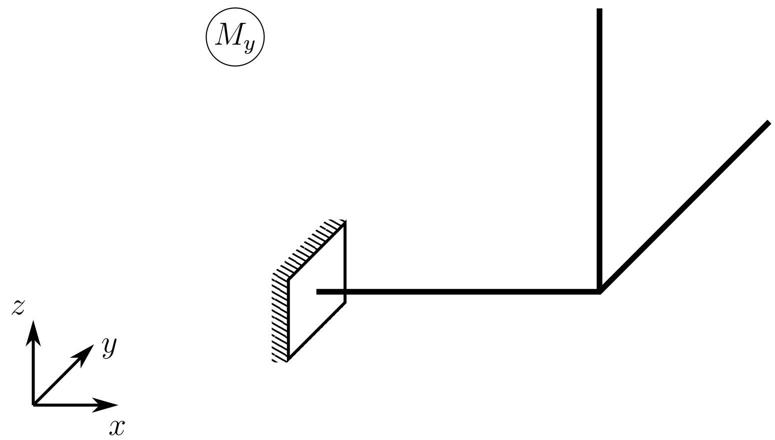
Geg.: $F_1 = F_2 = F$, $F_3 = 2F$

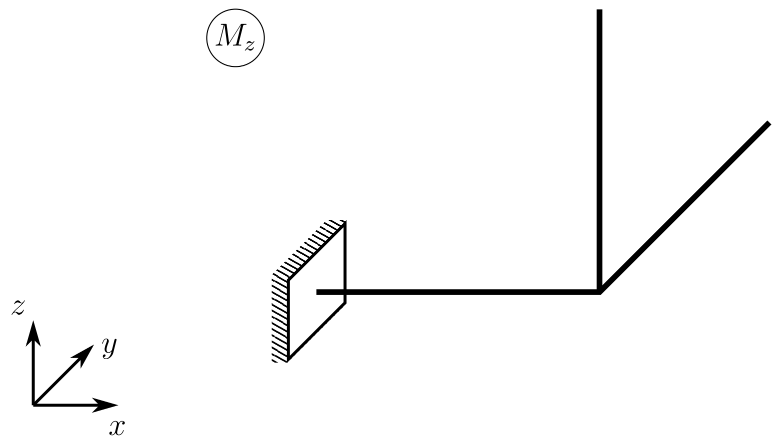
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig

Modulprüfung
Statik starrer Körper
9. März 2022

Vorlage zu Aufgabe 4:







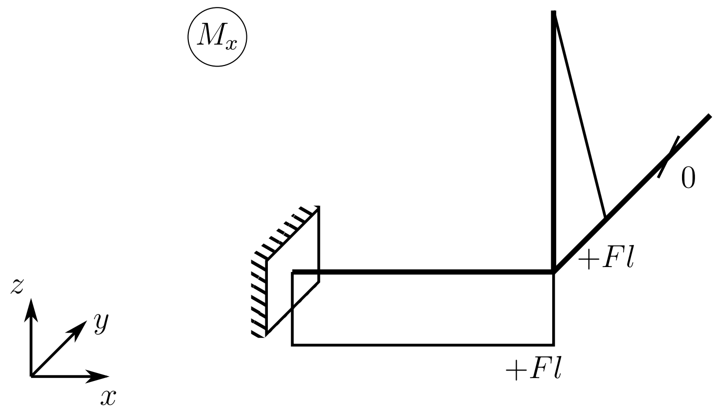
Musterlösung - Aufgabe 4

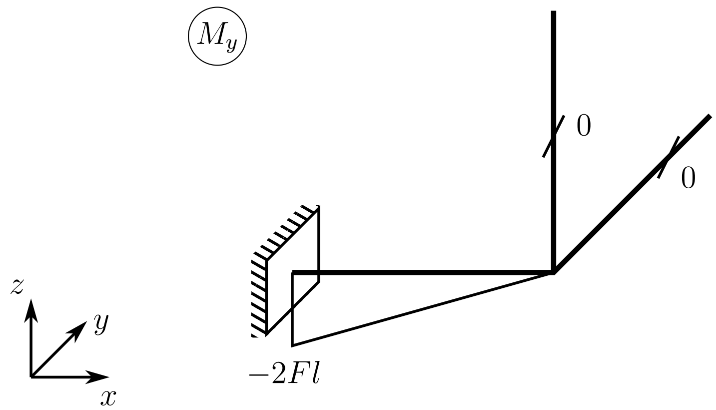
a)

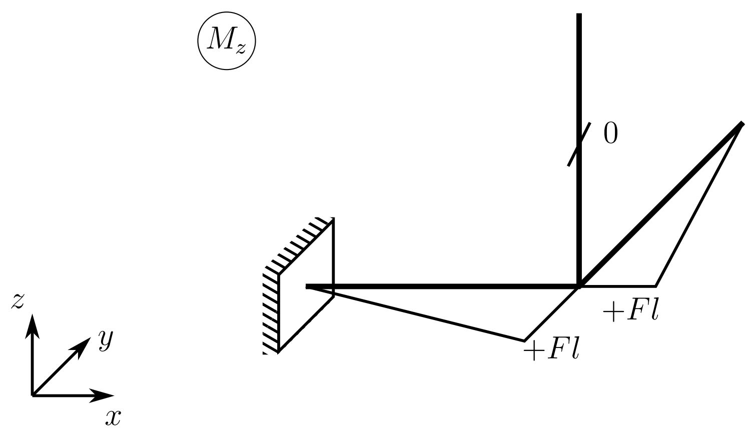
$$6 \cdot n = a + g,\; n = 1,\; a = 6,\; g = 0$$
$$6 = 6 \checkmark$$

1 starrer Körper nicht kinematisch gelagert
$\Rightarrow$ System statisch bestimmt

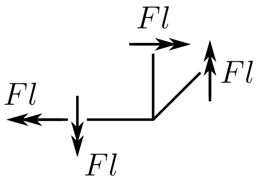
b)





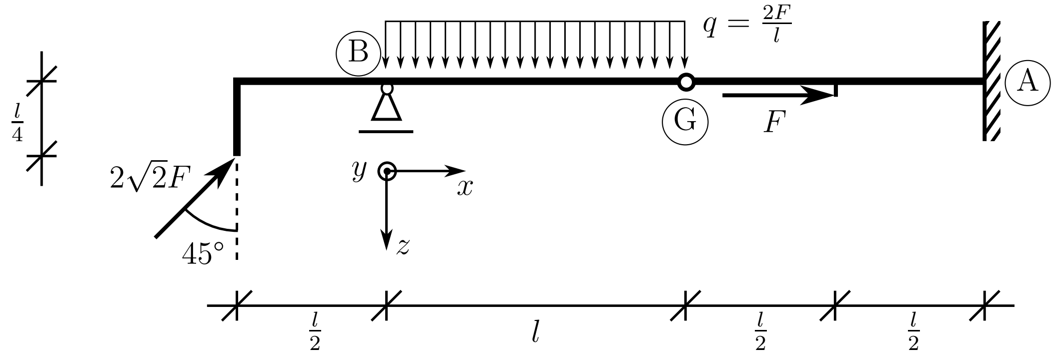


c) Freischnitt:



$$\sum M_{x_i}^B = 0 : Fl - Fl = 0 \checkmark$$
$$\sum M_{y_i}^B = 0 : 0 = 0 \checkmark$$
$$\sum M_{z_i}^B = 0 : Fl - Fl = 0 \checkmark$$

5. Aufgabe: (ca. 28 % der Gesamtpunkte)



Der dargestellte Träger wird in der angegebenen Weise belastet.

a) Bestimmen Sie die Auflagergrößen für die Lager in A und B und die Gelenkkräfte für das Gelenk G.

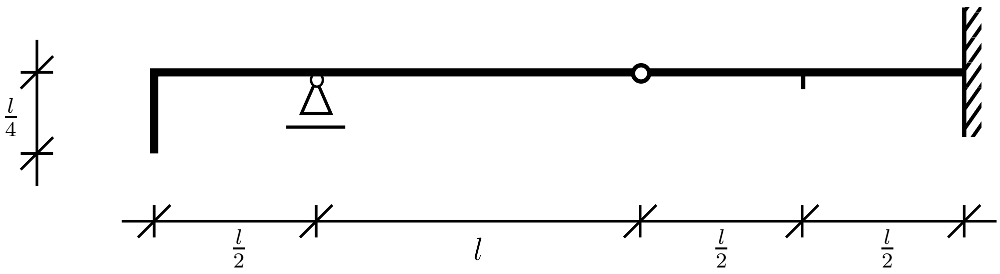
b) Bestimmen Sie im Feld $0 \leq x \leq l$ die Funktionsgleichungen für Querkraft $Q(x)$ und Biegemoment $M(x)$.

c) Skizzieren Sie ohne Angabe der Funktionsgleichungen den Verlauf der Querkraft $Q(x)$, des Biegemomentes $M(x)$ und der Normalkraft $N(x)$ für den ganzen Träger und geben Sie die maßgebenden Ordinaten an den Bereichsgrenzen an. Benutzen Sie hierfür den beiliegenden Vordruck.

d) Geben Sie für den in b) behandelten Bereich des Trägers Ort und Größe des extremalen Biegemoments an.

Geg.: $F, l, q = 2F/l$

Vorlage zu Aufgabe 5:



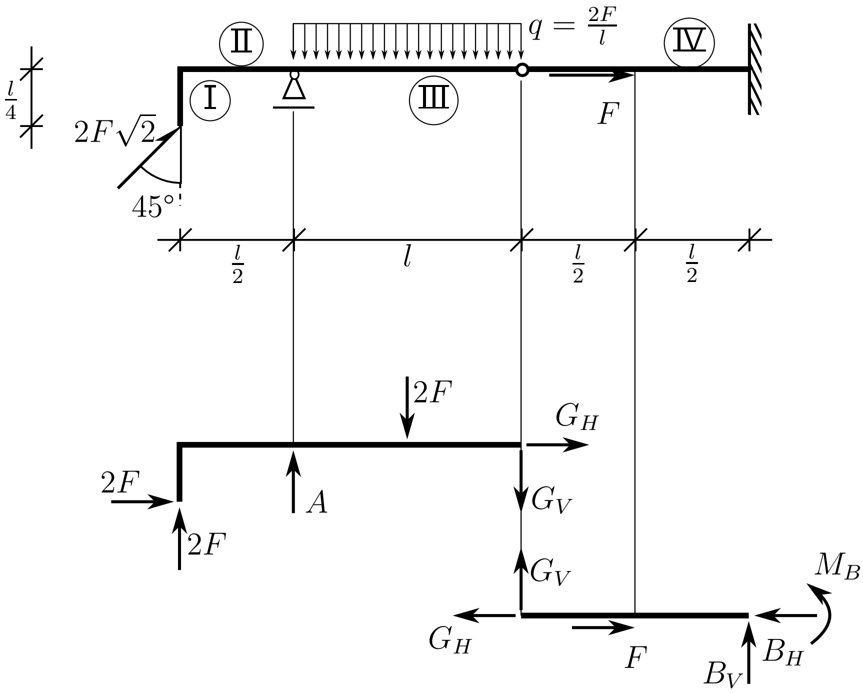
N

Q

M

Musterlösung - Aufgabe 5

a) Freischnitt



GGW linker Teilkörper:

$$\overset{\frown}{G}\colon 2F\frac{3}{2}l - 2F\frac{1}{4}l + Al - 2F\frac{l}{2} \overset{!}{=} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad A = -\frac{3}{2}F$$

$$\rightarrow\colon 2F + G_H \overset{!}{=} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad G_H = -2F$$

$$\uparrow\colon 2F + A - 2F - G_V \overset{!}{=} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad G_V = A = -\frac{3}{2}F$$

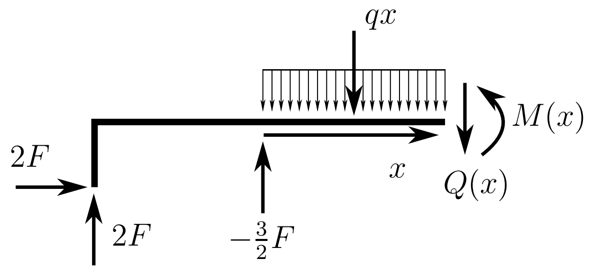
GGW rechter Teilkörper:

$$\overset{\frown}{B}\colon M_B - G_V \cdot l \overset{!}{=} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad M_B = G_v \cdot l = -\frac{3}{2}Fl$$

$$\leftarrow\colon G_H - F + B_H \overset{!}{=} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad B_H = F - G_H = 3F$$

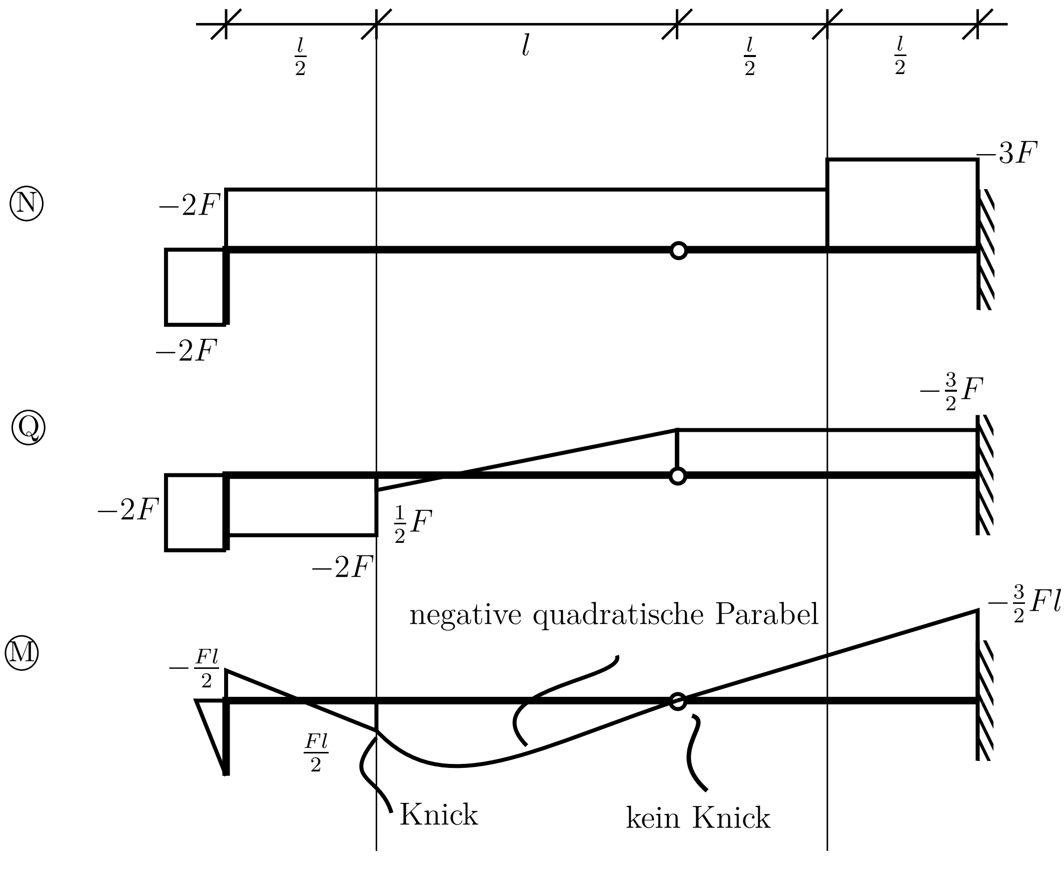
$$\uparrow\colon G_V + B_V \overset{!}{=} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad B_V = -G_V = \frac{3}{2}F$$

b)



$$
\begin{aligned}
Q(x) &= 2F - \frac{3}{2}F - \overbrace{qx}^{2\frac{F}{l}} = \frac{1}{2}F - 2F\frac{x}{l} \\
M(x) &= -qx\frac{x}{2} - \frac{3}{2}Fx + 2F\left(\frac{l}{2} + x\right) - 2F\frac{l}{4} \\
&= -F\frac{x^2}{l} + \frac{1}{2}Fx + \frac{Fl}{2}
\end{aligned}
$$

c)



d) Extremwert

$$
\begin{aligned}
Q(x_e) \stackrel{!}{=} 0 &= \frac{1}{2}F - 2F\frac{x_e}{l} \\
\Leftrightarrow x_e &= \frac{l}{4} \\
M(x_e) &= -\frac{Fl}{16} + \frac{Fl}{8} + \frac{Fl}{2} = \frac{9}{16}Fl
\end{aligned}
$$

Modulprüfung
Statik starrer Körper
am 9. März 2022

Lösungsvorlage

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....