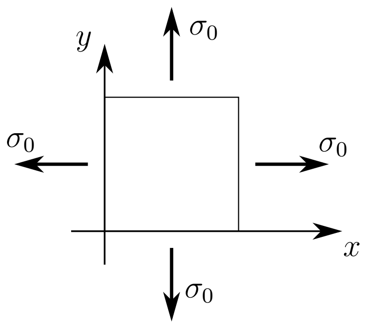
1. Aufgabe: (ca. 8 % der Gesamtpunkte)

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

a) Durch welche Einschränkungen des allgemeinen, dreidimensionalen Spannungszustands wird der ebene Spannungszustand (ESZ) definiert?

b) Gegeben sei folgender Spannungszustand mit gegebener Spannung σ_0:



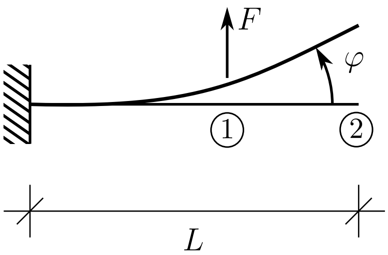
i) Zeichnen Sie den dazugehörigen Mohrschen Spannungskreis.

ii) Wie groß ist die maximale Schubspannung?

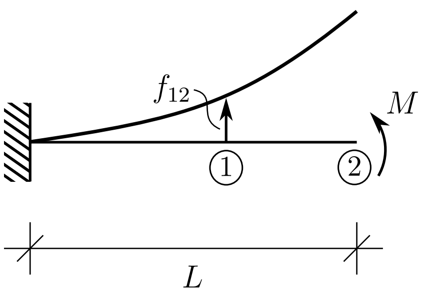
iii) Unter welchen Winkeln φ sind die Normalspannungen extremal?

c) Ein einseitig fest eingespannter Balken wird an seinem freien Ende in Richtung der z-Achse im Schwerpunkt des Querschnitts durch eine Einzellast belastet. Der Schubmittelpunkt des Querschnitts fällt nicht mit dem Schwerpunkt zusammen. Welche Verformungen treten auf und warum?

d) Bestimmen Sie mit Hilfe des Vertauschungssatzes von Maxwell/Betti die Verdrehung φ am Ende des unten abgebildeten Kragträgers unter Einwirkung der Last F.



Gegeben sei die Verschiebung $f_{12} = \frac{L^2 M}{2EI}$ infolge des Moments M:

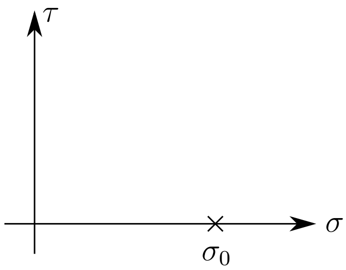


Geg.: F, M, L, EI

Musterlösung - Aufgabe 1

a)
- Belastung nur in Ebene
- Spannungskomponenten in eine Raumrichtung können vernachlässigt werden (z.B. $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$)

b)
- $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$



- $\tau_{xy} = 0$
- für alle Winkel φ ist $\tau = 0$ und damit sind die Normalspannungen extremal

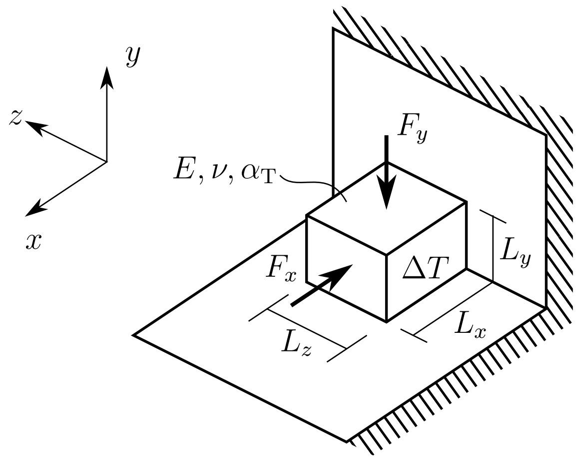
c)
- der Balken tordiert und verbiegt sich
- es resultiert ein Torsionsmoment M_T um die x-Achse und ein Biegemoment M_y um die y-Achse

d) Einflusszahl

$$f_{12} = \alpha_{12} M \quad \Rightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{L^2}{2EI}$$

$$\text{Maxwell:} \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{21} = \alpha_{21} F = \frac{L^2 F}{2EI}$$

2. Aufgabe: (ca. 11 % der Gesamtpunkte)

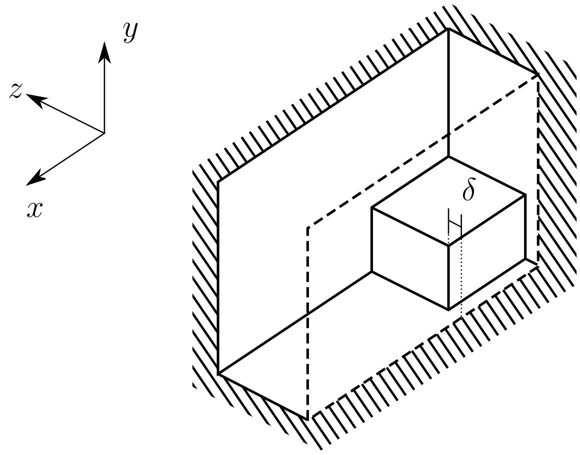


Der abgebildete Körper wird wie angegeben belastet. Die Kräfte F_x und F_y repräsentieren Resultierende von gleichmäßig auf die jeweiligen Flächen einwirkenden Druckkräften. Der Körper kann reibungsfrei entlang der Wände gleiten und es kann von einem homogenen Verformungszustand ausgegangen werden.

Geg.: F_x, F_y, L_x, L_y, L_z, E, ν, α_T, ΔT, δ

a) Wie groß ist die Dehnung in die jeweiligen Raumrichtungen unter isothermen Bedingungen ($\Delta T = 0$)?

Der Körper wird im Folgenden nur noch gleichmäßig durch die Temperaturdifferenz $\Delta T \neq 0$ erwärmt ($F_x = F_y = 0$).
Wie abgebildet wird die Dehnung in z-Richtung zudem nach der Überwindung eines Spalts δ behindert.



b) Berechnen Sie die zur Überwindung des Spalts δ in z-Richtung erforderliche Temperaturdifferenz ΔT.

c) Geben Sie den gesamten Spannungs- und Dehnungszustand nach Überwindung des Spalts δ an.

Musterlösung - Aufgabe 2

a)

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x = \frac{-F_x}{L_z L_y},\ \sigma_y = \frac{-F_y}{L_x L_z},\ \sigma_z = 0,\ \Delta T = 0 \\
&\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \cancel{\sigma_z})}{E} + \cancel{\alpha_\mathrm{T}\Delta T} \\
&\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \cancel{\sigma_z})}{E} + \cancel{\alpha_\mathrm{T}\Delta T} \\
&\varepsilon_z = \frac{\cancel{\sigma_z} - \nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} + \cancel{\alpha_\mathrm{T}\Delta T}
\end{aligned}
$$

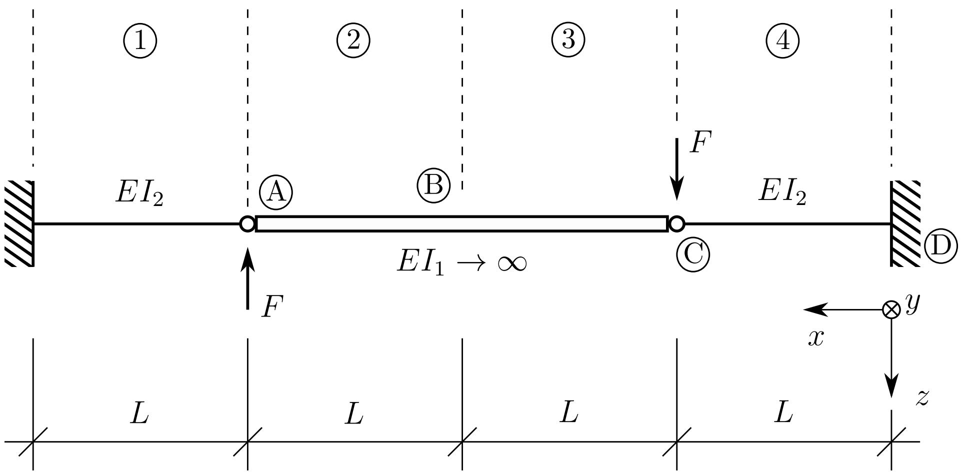
b)

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \quad \varepsilon_z = \frac{\delta}{L_z} \\
&\varepsilon_z = \frac{\cancel{\sigma_z} - \nu(\cancel{\sigma_x} + \cancel{\sigma_y})}{E} + \alpha_\mathrm{T}\Delta T \\
&\Leftrightarrow \quad \Delta T = \frac{\delta}{\alpha_\mathrm{T} L_z}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} + \alpha_\mathrm{T}\Delta T && (1) \\
&\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} + \alpha_\mathrm{T}\Delta T && (2) \\
&\varepsilon_z = \frac{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} + \alpha_\mathrm{T}\Delta T && (3) \\
&\sigma_x = \sigma_y = 0 \quad \varepsilon_z = \frac{\delta}{L_z} \\
&(3): \quad \sigma_z = E\varepsilon_z - E\alpha_\mathrm{T}\Delta T \\
&(1): \quad \varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z + \alpha_\mathrm{T}\Delta T \\
&(2): \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z + \alpha_\mathrm{T}\Delta T
\end{aligned}
$$

3. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Gegeben sei das oben abgebildete Tragwerk mit den Biegesteifigkeiten $EI_1 \to \infty$ und EI_2.

Geg.: F, L, $EI_1 \to \infty$, EI_2

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgabenteile:

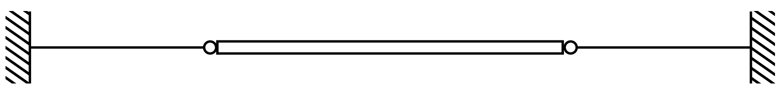
a) Geben Sie für die Bereiche 3 und 4 die Biegelinie in Abhängigkeit der Integrationskonstanten an. Benutzen Sie hierfür das gegebene Koordinatensystem.

Im Zuge einer vorherigen statischen Untersuchung wurde an der Einspannung D die vertikale Auflagerkraft berechnet. Es gilt $D_\text{v} = -F$, wobei D_v in positive z-Richtung zeigt.

b) Stellen Sie alle zur Bestimmung der Integrationskonstanten benötigten Rand- und Übergangsbedingungen auf. Nutzen Sie dabei die Symmetrie des Systems aus.

c) Bestimmen Sie mithilfe von b) die Integrationskonstanten aus a).

d) Skizzieren Sie qualitativ die Biegelinie des gesamten Balkens in der gegebenen Vorlage.



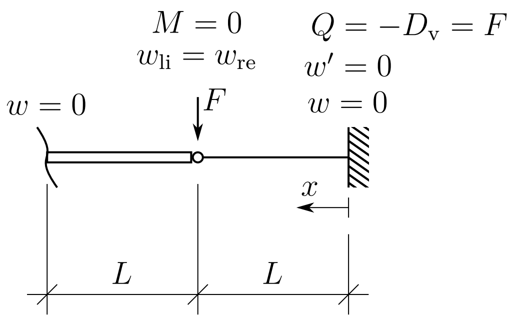
e) Bestimmen Sie den relativen vertikalen Abstand Δz zwischen den Punkten A und C. Überprüfen Sie anschließend Ihr Ergebnis mithilfe eines Einheitenchecks.

Musterlösung - Aufgabe 3

a)

$$
\begin{aligned}
③: \quad && w_3' &= c_1 && (1)\\
&& w_3 &= c_1 x + c_2 && (2)\\
④: \quad && EI_2 w_4^{IV} &= q(x) = 0 && (3)\\
-Q_4(x) = && EI_2 w_4''' &= c_3 && (4)\\
-M_4(x) = && EI_2 w_4'' &= c_3 x + c_4 && (5)\\
&& EI_2 w_4' &= \frac{1}{2} c_3 x^2 + c_4 x + c_5 && (6)\\
&& EI_2 w_4 &= \frac{1}{6} c_3 x^3 + \frac{1}{2} c_4 x^2 + c_5 x + c_6 && (7)
\end{aligned}
$$

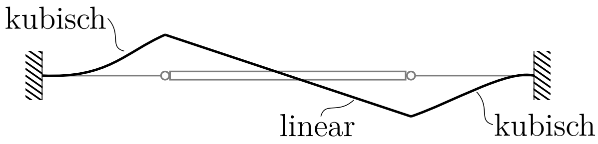
b)



c)

$$
\begin{aligned}
& w_4(x=0) = 0 && \overset{(7)}{\Rightarrow} \quad c_6 = 0\\
& w_4'(x=0) = 0 && \overset{(6)}{\Rightarrow} \quad c_5 = 0\\
& Q_4(x=0) = F \overset{(4)}{=} -c_3 && \Rightarrow \quad c_3 = -F\\
& M_4(x=L) = 0 \overset{(5)}{=} -FL + c_4 && \Rightarrow \quad c_4 = FL\\
& w_4(x=L) = w_3(x=L) && \overset{(2),(7)}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{EI_2}\left(-\frac{1}{6}FL^3 + \frac{1}{2}FL^3\right) = c_1 L + c_2\\
& && \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{3EI_2}FL^3 - c_1 L \qquad (8)\\
& w_3(x=2L) = 0 && \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad c_1 \cdot 2L + c_2 = 0 \qquad (9)\\
& (8) \text{ in } (9): 2Lc_1 - Lc_1 + \frac{1}{3EI_2}FL^3 = 0 && \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{3EI_2}FL^2\\
& (9): c_2 = \frac{2}{3EI_2}FL^3 &&
\end{aligned}
$$

d)

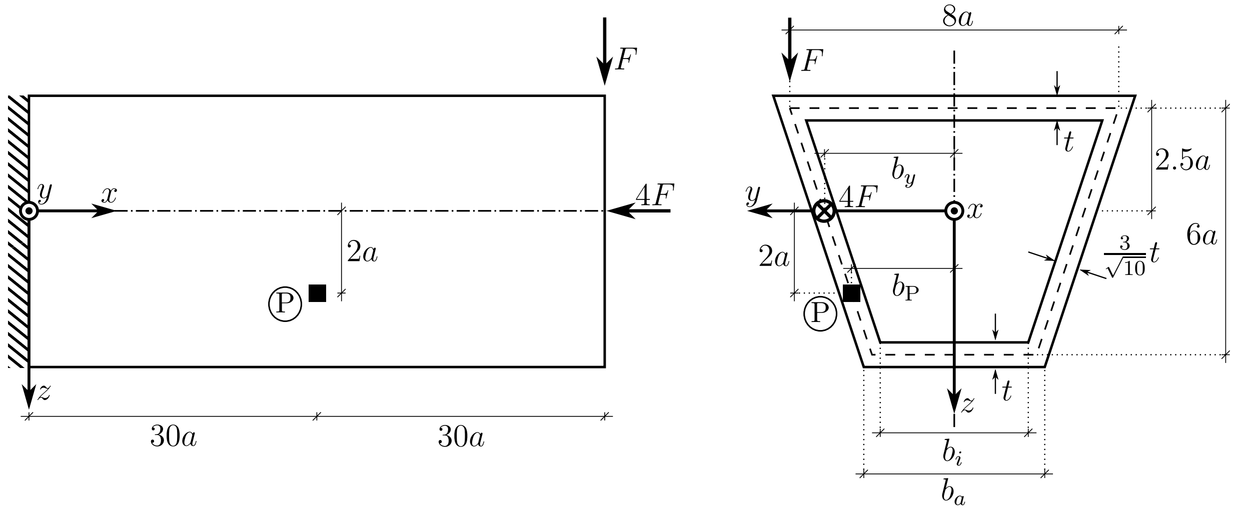


e)

$$\text{wegen Symmetrie: } \Delta z = 2 \cdot w_4(x = L) = \frac{2}{3EI_2} F L^3$$

$$[\Delta z] = \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^3}{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot \mathrm{m}^4} = \mathrm{m}$$

4. Aufgabe: (ca. 33 % der Gesamtpunkte)



Der dargestellte Kragträger mit trapezförmigem, zur z-Achse symmetrischem Hohlkastenprofil wird durch die exzentrische Kraft $4F$ in negative x-Richtung und die exzentrische Kraft F in positive z-Richtung belastet. Die Breite b_y wird vom Profilschwerpunkt zum Angriffspunkt der Kraft $4F$ auf der Profilmittellinie gemessen. Die Breite b_P beschreibt den Abstand von der z-Achse zum Punkt P auf der Profilmittellinie. Die Abmessungen b_i und b_a beziehen sich auf die Innen- und Außenabmessungen des unteren Abschlusses des Trapezprofils.

Geg.: F, a, $t = 0.4a$, $b_y = 3.2a$, $b_\mathrm{P} = 2.5a$, $b_i = \frac{56}{15}a$, $b_a = \frac{64}{15}a$, $A = 9.9a^2$, $I_y = 56.2a^4$, $I_z = 66.7a^4$

Folgende Teilaufgaben sind zu bearbeiten:

a) Ermitteln Sie alle Schnittgrößen an der Stelle $x = 30a$ im gegebenen Koordinatensystem.

b) Berechnen Sie mit den in a) ermittelten Schnittgrößen die Normalspannung, die vertikale Komponente der Schubspannung infolge Querkraft sowie die Schubspannung infolge Torsion im Punkt P und runden Sie Ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen.

c) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Normalspannungsnulllinie in der Form $z = f(y)$.

Rechnen Sie im Folgenden mit den Spannungen $\sigma_x^\mathrm{P} = -1.95\frac{F}{a^2}$ und $\tau_{xz}^\mathrm{P} = 0.26\frac{F}{a^2}$ in der xz-Ebene im Punkt P weiter.

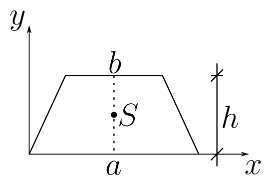
d) Zeichnen Sie den Spannungszustand für das Flächenelement im Punkt P und berechnen Sie die dazugehörigen Hauptspannungen und Hauptrichtungen. Wie sieht das dazugehörige gedrehte Flächenelement aus?

e) Skizzieren Sie für den im Punkt P vorliegenden Spannungszustand den Mohrschen Spannungskreis. Zeichnen Sie insbesondere den in c) errechneten Winkel der Hauptrichtungen ein.

Hinweise:

* Es darf dünnwandig gerechnet werden.
* Der vertikale Schwerpunkt eines Trapezes berechnet sich zu

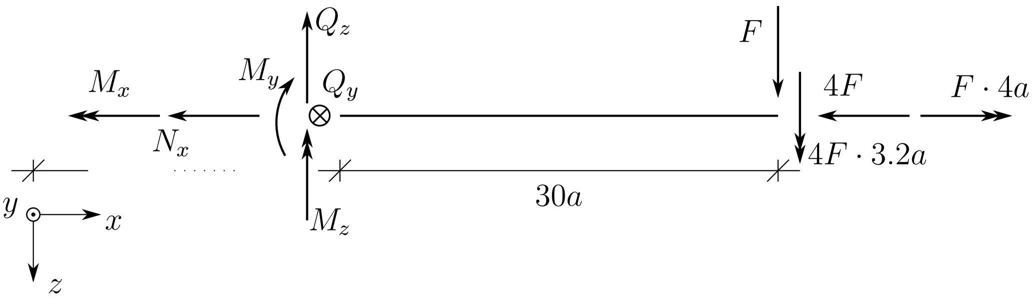
$$y_s = \frac{h}{3}\frac{a+2b}{a+b}$$



* Eine Verwölbung des Querschnitts ist nicht verhindert.

Musterlösung - Aufgabe 4

a) Schnittgrößen bei $x = 30a$
Last in Schwerpunkt verschieben $\Rightarrow$ Torsionsmoment und Biegemoment M_z



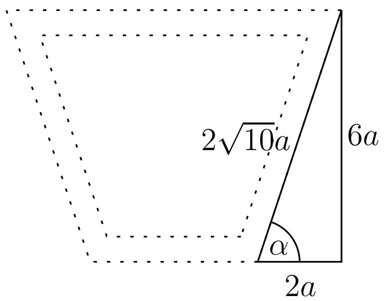
$$\sum F_{ix} = 0 : N_x = -4F$$
$$\sum F_{iz} = 0 : Q_z = F$$
$$\sum F_{iy} = 0 : Q_y = 0$$
$$\sum M_{ix} = 0 : M_x = F \cdot 4a = 4aF$$
$$\sum M_{iy} = 0 : M_y = -F \cdot 30a = -30aF$$
$$\sum M_{iz} = 0 : M_z = 4F \cdot 3.2a = 12.8aF$$

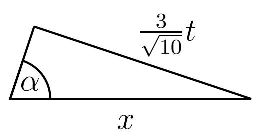
b) Spannungen in Punkt P

* Bestimmung von σ_x^{P} ($z = 2a$, $y = 2.5a$):

$$\begin{aligned}\sigma_x^{\mathrm{P}} &= \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \\ &= -\frac{4F}{9.9a^2} - \frac{30aF}{56.2a^4} \cdot 2a - \frac{12.8aF}{66.7a^4} \cdot 2.5a \\ &= -1.951 \frac{F}{a^2}\end{aligned}$$

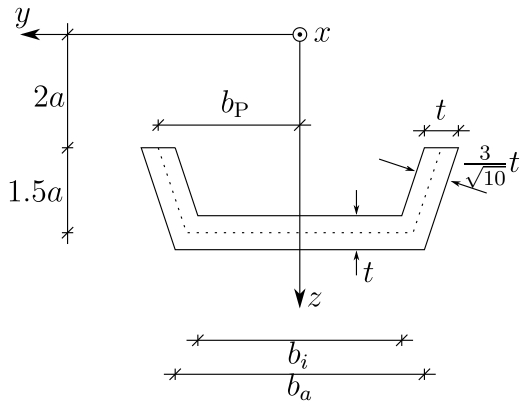
* Bestimmung der vertikalen Komponente von $\tau_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{P}}$:
Bestimmung der horizontalen Profildicke der Trapezseitenflächen:





$$\sin(\alpha) = \frac{6}{2\sqrt{10}}$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{3}{\sqrt{10}} t \cdot \frac{1}{sin(\alpha)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{10}} t \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} = t\end{aligned}$$



$$S_y^\mathrm{A} = \mathrm{A}^* \cdot z^*$$

$$\begin{aligned}
S_y^\mathrm{P} \quad &= \mathrm{A}_a^* \cdot z_a^* - \mathrm{A}_i^* \cdot z_i^* \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\left(b_a + (2b_p + t)\right) \cdot \left(1.5a + \frac{t}{2}\right)}_{\mathrm{A}_a^*} \cdot \underbrace{\left[\frac{\left(1.5a + \frac{t}{2}\right)}{3} \cdot \frac{(2b_p + t) + 2b_a}{(2b_p + t) + b_a} + 2a\right]}_{z_a^*} \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{2}\left(b_i + (2b_p - t)\right) \cdot \left(1.5a - \frac{t}{2}\right)}_{\mathrm{A}_i^*} \cdot \underbrace{\left[\frac{\left(1.5a - \frac{t}{2}\right)}{3} \cdot \frac{(2b_p - t) + 2b_i}{(2b_p - t) + b_i} + 2a\right]}_{z_i^*} \\
&\approx 8.22a^2 \cdot (0.82a + 2a) - 5.42a^2 \cdot (0.63a + 2a) \\
&= 8.93a^3
\end{aligned}$$

alternativ:

$$\begin{aligned}
z^* \quad &= 2a + \frac{1}{A^*}(\mathrm{A}_a^* \cdot z_a^* - \mathrm{A}_i^* \cdot z_i^*) \\
&= 2a + \frac{1}{2.8a^2}(8.22a^2 \cdot 0.82a - 5.42a^2 \cdot 0.63a) \\
&\approx 3.19a \\
S_y^\mathrm{P} \quad &= \mathrm{A}^* \cdot z^* = 2.8a^2 \cdot 3.19a = 8.93a^3 \\
b^\mathrm{P}(z = 2a) &= 2t \\
\tau_Q^\mathrm{P} \quad &= \frac{Q_z \cdot S_y^\mathrm{P}}{I_y \cdot b^\mathrm{P}} = \frac{F \cdot 8.93a^3}{56.2a^4 \cdot 2t} \approx 0.199\frac{F}{a^2}
\end{aligned}$$

* Bestimmung von $\tau_\mathrm{T}^\mathrm{P}$:

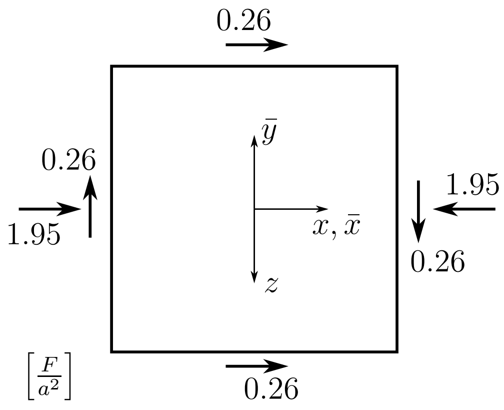
$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_m &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(b_a + b_i) + 8a\right) \cdot 6a = 36a^2 \\
t^\mathrm{P}(z = 2a) &= \frac{3}{\sqrt{10}}t \\
\tau_\mathrm{T}^\mathrm{P} &= \frac{M_x}{2A_m \cdot t^\mathrm{P}} = \frac{4aF}{2 \cdot 36a^2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}t} = \frac{\sqrt{10}}{54}\frac{F}{a^2}
\end{aligned}$$

c) Bestimmung der Spannungsnulllinie

$$\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y \overset{!}{=} 0$$

$$z = \left(\frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{N}{A} \right) \cdot \frac{I_y}{M_y} \approx -0.36y - 0.76a$$

d) Berechnung der Hauptspannungen in Punkt P



$$\sigma_{\bar{x}} = -1.95\frac{F}{a^2},\ \sigma_{\bar{y}} = 0,\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} = -0.26\frac{F}{a^2}$$

$$\sigma_{1,2}^{\mathrm{P}} = \frac{\sigma_{\bar{x}}^{\mathrm{P}} + \sigma_{\bar{y}}^{\mathrm{P}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}^{\mathrm{A}} + \sigma_{\bar{y}}^{\mathrm{A}}}{2}\right)^2 + {\tau_{\bar{x}\bar{y}}^{\mathrm{A}}}^2}$$

$$= -\frac{1.95}{2}\frac{F}{a^2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1.95}{2}\right)^2 + (-0.26)^2}\frac{F}{a^2}$$

$$\approx \begin{cases} 0.03\frac{F}{a^2} = \sigma_1 \\ -1.98\frac{F}{a^2} = \sigma_2 \end{cases}$$

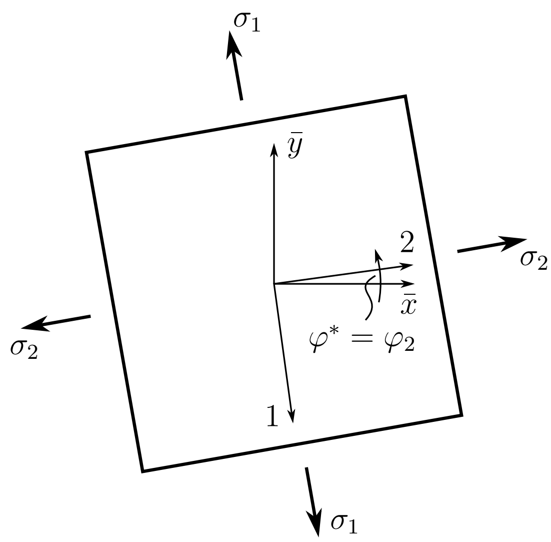
$$\tan(2\varphi^*) = \frac{2\tau_{\bar{x}\bar{y}}}{\sigma_{\bar{x}} - \sigma_{\bar{y}}} = \frac{-2 \cdot 0.26}{-1.95} = \frac{4}{15}$$

$$\rightarrow \varphi^* \approx 7.47°$$

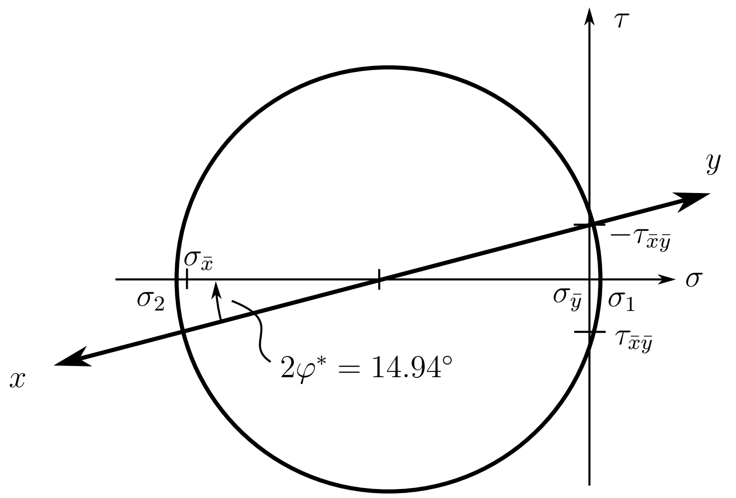
$$\sigma_\xi(\varphi^*) = \frac{1}{2}(\sigma_{\bar{x}} + \sigma_{\bar{y}}) + \frac{1}{2}(\sigma_{\bar{x}} - \sigma_{\bar{y}})\cos(2\varphi^*) + \tau_{\bar{x}\bar{y}}\sin(2\varphi^*)$$

$$= \frac{1}{2}(-1.95)\frac{F}{a^2} + \frac{1}{2}(-1.95)\cos(14.94°)\frac{F}{a^2} - 0.26\sin(14.94°)\frac{F}{a^2}$$

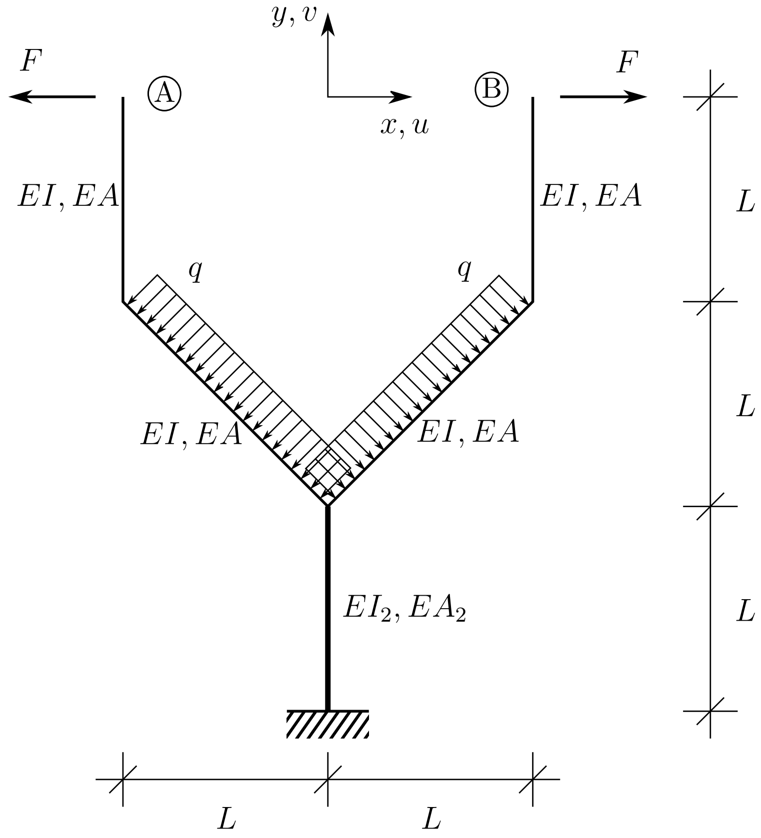
$$\approx -1.98\frac{F}{a^2} = \sigma_2$$



e) Mohrscher Spannungskreis



5. Aufgabe: (ca. 28 % der Gesamtpunkte)



Gegeben sei das oben abgebildete, statisch bestimmte Tragwerk.

Geg.: q, L, $F = qL$, E, A, $I = 6L^2A$, $A_2 = 2A$, $A_3 = \frac{1}{2}A$, $I_2 = 5I$

Bestimmen Sie für das dargestellte Tragwerk mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte:

a) Die horizontale Verschiebung u in Punkt B.

Zur Verminderung der Verformungen infolge der Belastung wird zwischen den Punkten A und B ein zusätzlicher gerader Stab (Länge $2L$, Dehnsteifigkeit EA_3) eingebaut.

b) Bestimmen Sie die Stabkraft S für die gleichen Belastungen F und q wie zuvor.

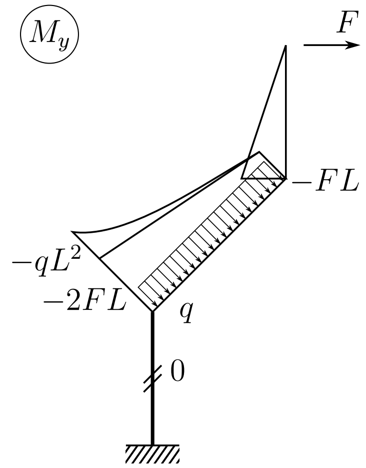
c) Bestimmen Sie die horizontale Verschiebung u im Punkt B im statisch unbestimmten System. Hierbei muss der Schnittgrößenverlauf am statisch unbestimmten System nicht gezeichnet werden.

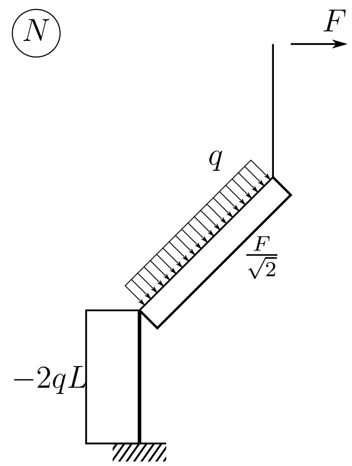
Hinweise:

* Es werden nur Lösungen mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte bewertet.
* Die Schubdeformation ist zu vernachlässigen.

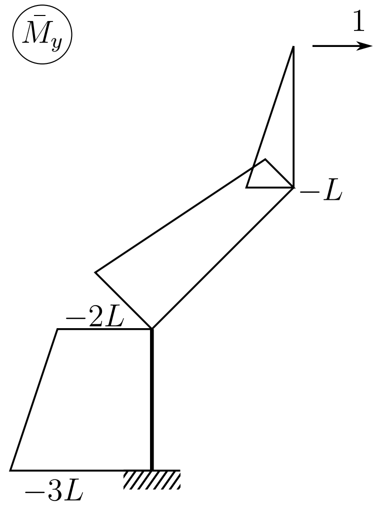
Musterlösung - Aufgabe 5

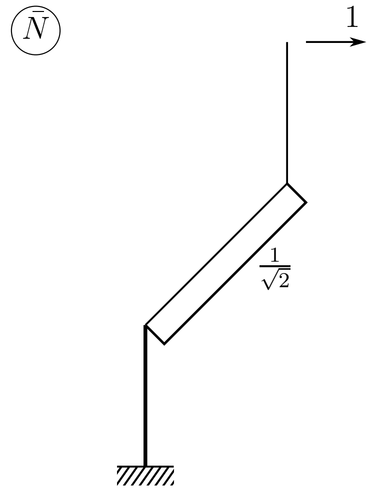
a) horizontale Verschiebung u:
0-System: Kraft F wirkt auf rechter und linker Seite des Tragwerks entgegengesetzt





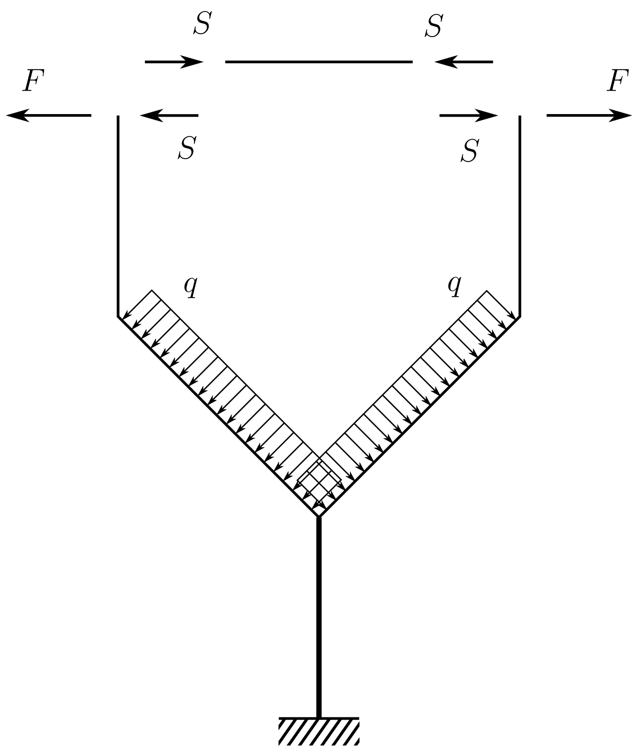
1-System: Kraft 1 wirkt nur auf rechter Seite des Tragwerks

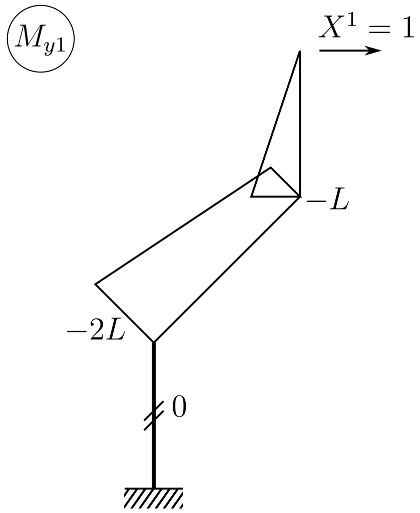


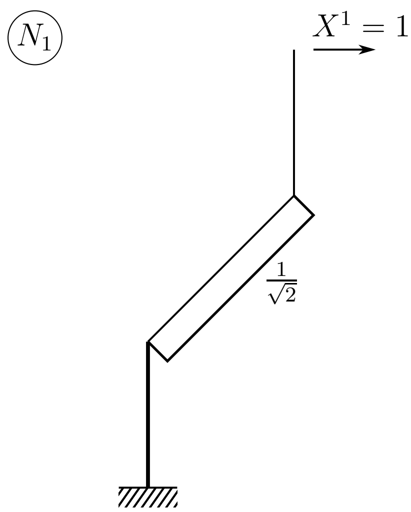


$$
\begin{aligned}
u =& \int \frac{M_y \bar{M}_y}{EI}\,\mathrm{d}x + \int \frac{N\bar{N}}{EA}\,\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}(-FL)(-L)L + \frac{1}{6}\left[(-L)(-2FL-2FL)+(-2L)(-FL-4FL)\right]\sqrt{2}L \right.\\
&\left. + \frac{1}{12}(-qL^2)(-L-6L)\sqrt{2}L\right] + \frac{1}{EA}\left[\left(\frac{F}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}L\right] \\
=& \frac{FL^3}{3EI} + \frac{7\sqrt{2}FL^3}{3EI} + \frac{7\sqrt{2}qL^4}{12EI} + \frac{FL}{\sqrt{2}EA} \approx 1.45\frac{qL^2}{EA}
\end{aligned}
$$

b) zusätzlicher Stab, Stabkraft S:
statisch unbestimmtes System $\Rightarrow$ statisch bestimmtes Grundsystem
Kraft $S = X^1$ wirkt auf rechter und linker Seite des Tragwerks entgegengesetzt







$$
\begin{aligned}
\alpha_{10} &= \int \frac{M_y M_{y1}}{EI}\,\mathrm{d}x + \int \frac{N N_1}{EA}\,\mathrm{d}x = 2u = 2.9\frac{qL^2}{EA} \\
\alpha_{11} &= \int \frac{M_{y1} M_{y1}}{EI}\,\mathrm{d}x + \int \frac{N_1 N_1}{EA}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left[\frac{1}{3EI}(-L)(-L)L + \frac{1}{6EI}\left((-L)(-2L-2L) + (-2L)(-L-4L)\right)\sqrt{2}L \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{EA}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}L\right] + \frac{1}{EA_3}(-1)(-1)2L \\
&= \frac{2L^3}{3EI} + \frac{14\sqrt{2}L^3}{3EI} + \frac{\sqrt{2}L}{EA} + \frac{2L}{EA_3} \\
&= \frac{\left(1+7\sqrt{2}\right)L}{9EA} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 4\right)\frac{L}{EA} \approx 6.63\frac{L}{EA}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow S = \mathrm{X}^1 = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}$$
$$\approx -0.44qL$$

c)

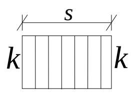
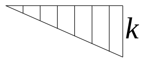
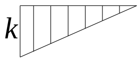
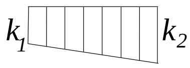
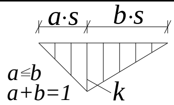
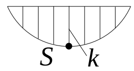
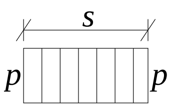
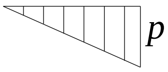
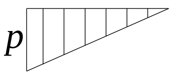
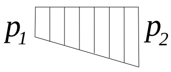
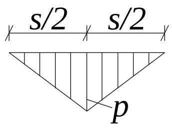
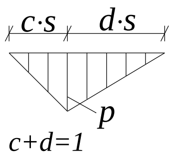
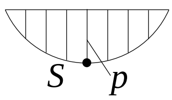
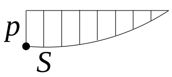
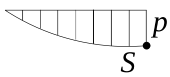
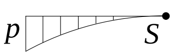
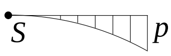
$$u = \int \frac{M_y \bar{M}_{y0}}{EI}\,\mathrm{d}x + \int \frac{N \bar{N}_0}{EA}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\text{mit} \qquad & M_y = M_{y0} + X^1 M_{y1} && (M_{y0} = M_y \text{ aus } a)) \\
& N = N_0 + X^1 N_1 && (N_0 = N \text{ aus } a)) \\
& \bar{M}_{y0} = \bar{M}_y \\
& \bar{N}_0 = \bar{N}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}(-FL - X^1 L)(-L)L \right.\\
&+ \frac{1}{6}\left[(-FL - X^1 L)(-2L - 2L) + (-2FL - 2X^1 L)(-L - 4L)\right]\sqrt{2}L \\
&\left. + \frac{1}{12}(-qL^2)(-L - 6L)\sqrt{2}L\right] + \frac{1}{EA} 1 \cdot \left(\frac{F}{\sqrt{2}} + X^1 \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}L \\
=&\frac{1}{E(6L^2A)}\left[\frac{14}{75}qL^4 + 1.85qL^4 + \frac{7\sqrt{2}}{12}qL^4\right] + \frac{1}{EA}\frac{7\sqrt{2}}{25}qL^2 \\
\approx&0.87\frac{qL^2}{EA}
\end{aligned}$$

Koppeltafel

Werte der Integrale $\int_0^s P(x) \cdot K(x) \mathrm{dx}$

K(x) / P(x)						
	pks	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{p}{2}(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{2}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{p}{6}(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+a)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{6}(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+b)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{k}{2}(p_1+p_2)s$	$\frac{k}{6}(p_1+2p_2)s$	$\frac{k}{6}(2p_1+p_2)s$	$[\frac{p_1}{6}(2k_1+k_2)$ $+\frac{p_2}{6}(k_1+2k_2)]s$	$[\frac{k}{6}[p_1(1+b)+$ $p_2(1+a)]s$	$\frac{k}{3}(p_1+p_2)s$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{4}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12b}(3-4a^2)s$	$\frac{5}{12}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{pk}{6}(1+c)s$	$\frac{pk}{6}(1+d)s$	$\frac{p}{6}[k_1(1+d)+$ $k_2(1+c)]s$	$\frac{pk}{6bc}(2c-c^2-a^2)s$ für $c \geq a$	$\frac{pk}{3}(1+cd)s$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{3}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{3}(1+ab)s$	$\frac{8}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{p}{12}(5k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-a-a^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+5k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-b-b^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+b+b^2)s$	$\frac{1}{5}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{p}{12}(k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+a+a^2)s$	$\frac{1}{5}pks$

$S \triangleq$ Scheitel einer quadratischen Parabel