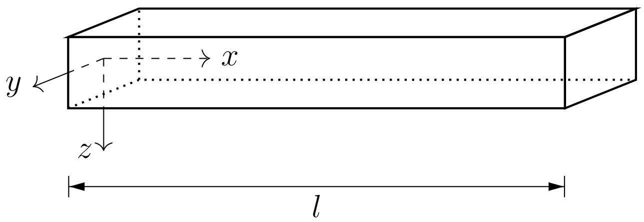
Institut für Mechanik	Modulprüfung
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch	Statik starrer Körper
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	24. August 2022

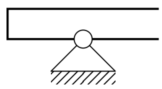
1. Aufgabe: (ca. 11 % der Gesamtpunkte)

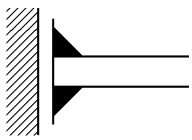
a) Schneiden Sie folgenden Balken an einer beliebigen Stelle $0 < x < l$ frei. Zeichnen Sie alle Schnittgrößen ein und benennen Sie diese.

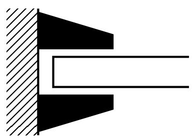


b) Wie ist ein zentrales Kraftsystem definiert?

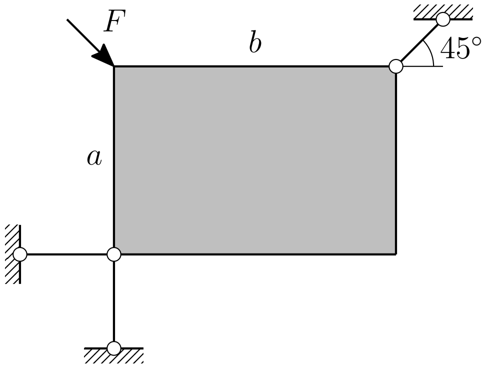
c) Zeichnen Sie in die unten abgebildeten Lagerungen die noch vorhandenen Bewegungsmöglichkeiten der Bauteile ein, die trotz Lagerung noch möglich sind.
Schneiden Sie außerdem die Bauteile von den Lagern frei. Zeichnen Sie die Freischnitte mit den entsprechenden Reaktionen neben die abgebildeten Lager.







d) Gegeben sei eine starre Scheibe (grau), die an zwei Ecken wie dargestellt gelagert ist.



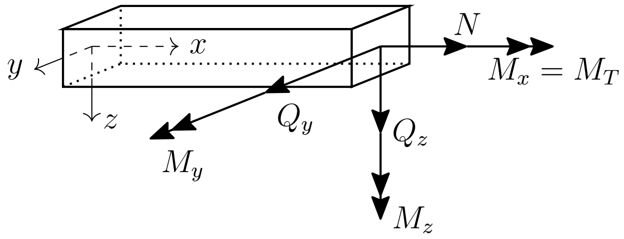
i) Ist das System statisch bestimmt (notwendige Bedingung)?

ii) Für welche Bedingung von a und b ist das System kinematisch bestimmt? Argumentieren Sie mit einem Polplan.

Gegeben: a, b, F.

Musterlösung - Aufgabe 1

a)



Normalkraft
Torsionsmoment

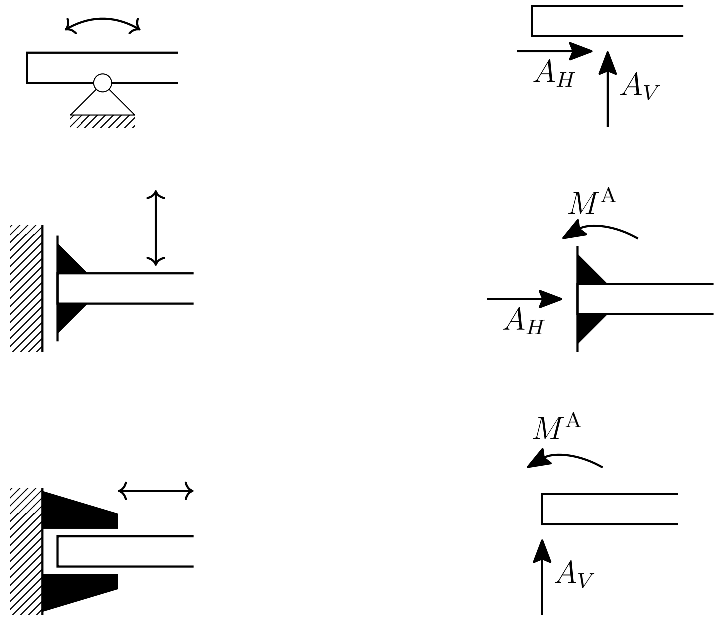
Querkraft in y- bzw. z-Richtung

Biegemoment um y- bzw. z-Achse

b) Zentrales Kraftsystem: Wirkungslinien aller Kräfte treffen sich in einem Punkt.

c)

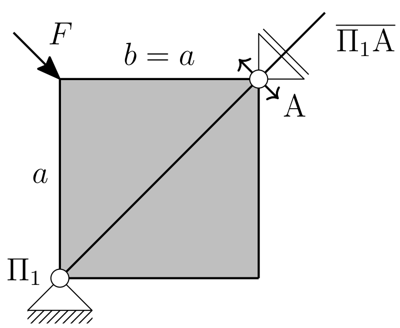
Bewegungsmöglichkeiten — Lagerreaktionen



d) i) Notwendige Bedingung

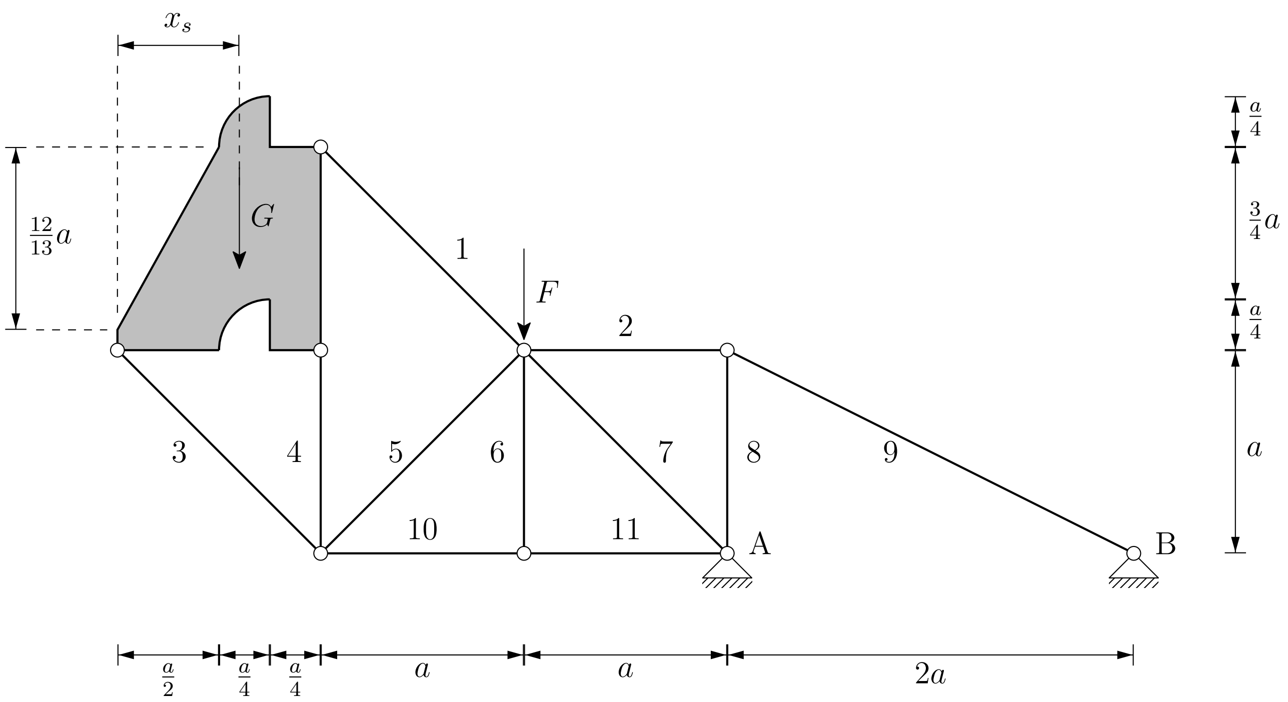
$$
\begin{aligned}
f &= 3 \cdot n - (r + v) \\
&= 3 \cdot 1 - (3 + 0) = 0 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

ii) Hinreichende Bedingung (Polplan)



- Vereinfachung Pendelstützen.
- Für $a \neq b$: Hauptpol Π_1 befindet sich nicht auf Polstrahl $\overline{\Pi_1 A}$.
  $\Rightarrow$ Widerspruch im Polplan.
  $\Rightarrow$ System ist kinematisch bestimmt.
- Für $a = b$: Hauptpol Π_1 befindet sich auf Polstrahl $\overline{\Pi_1 A}$.
  $\Rightarrow$ Kein Widerspruch im Polplan.
  $\Rightarrow$ System ist kinematisch.

2. Aufgabe: (ca. 23 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte Tragwerk besteht aus 11 Stäben und einer starren Scheibe (grau). Es wird durch die Kraft F und durch die Gewichtskraft G (im Schwerpunkt der starren Scheibe) belastet.

Gegeben: a, F, G.

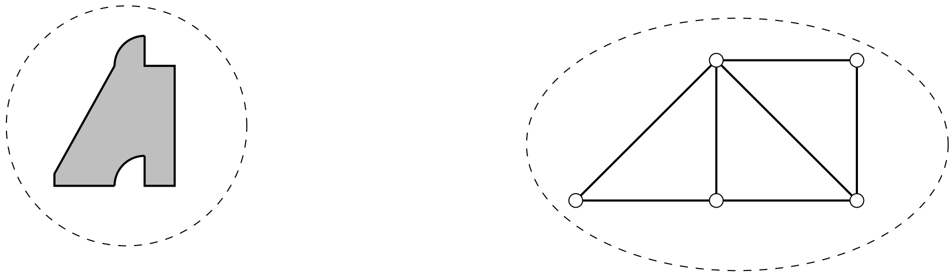
a) Beurteilen Sie das Tragwerk hinsichtlich der statischen Bestimmtheit. Begründen Sie **ausführlich**.

b) Weisen Sie nach, dass für die Schwerpunktkoordinate x_s der Scheibe gilt: $x_s = \frac{3}{5}a$.

c) Bestimmen Sie die Stabkräfte S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 und S_6 für den Fall $x_s = \frac{3}{5}a$.

Musterlösung - Aufgabe 2

a)



- Notwendige Bedingung

$$\begin{aligned} f &= 3n - (r + v) \\ &= 3 \cdot 2 - (3 + 3) = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

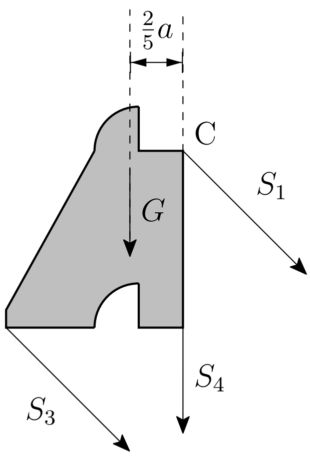
- Hinreichende Bedingung
  Das Tragwerk besteht aus einem Fachwerk, welches gemäß des 1. Bildungsgesetzes aufgebaut ist, sowie einer starren Scheibe.
  Die beiden starren Körper sind durch drei Stäbe verbunden, die nicht alle parallel und nicht zentral angebracht sind.
  Außerdem ist das System nicht kinematisch gelagert.

$\Rightarrow$ Das System ist statisch bestimmt.

b)

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{\sum x_{si}\, A_i}{\sum A_i} \\ &= \frac{\frac{a}{2} \cdot a^2 - \frac{a}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13}a \cdot \frac{a}{2} + \cancel{(\frac{3}{4} - \frac{1}{3\pi})a \cdot \frac{\pi}{64}a^2} - \cancel{(\frac{3}{4} - \frac{1}{3\pi})a \cdot \frac{\pi}{64}a^2}}{a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13}a \cdot \frac{a}{2} + \cancel{\frac{\pi}{64}a^2} - \cancel{\frac{\pi}{64}a^2}} \\ &= \frac{3}{5}a \end{aligned}$$

c) Ritterschnitt



$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{C}}: \quad S_3 \cdot \sqrt{2}a + G \cdot \frac{2}{5}a = 0$$

$$\Rightarrow S_3 = -\frac{\sqrt{2}}{5}G$$

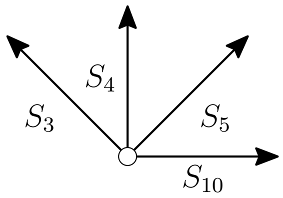
$$\rightarrow: \quad S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{\sqrt{2}}{5}G$$

$$\uparrow: \quad -S_4 - G - S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow S_4 = -G$$

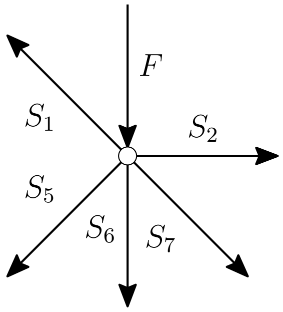
Knotenpunktverfahren



$$\uparrow: \quad S_5\frac{\sqrt{2}}{2} + S_3\frac{\sqrt{2}}{2} + S_4 = 0$$
$$\Rightarrow S_5 = \frac{6\sqrt{2}}{5}G$$

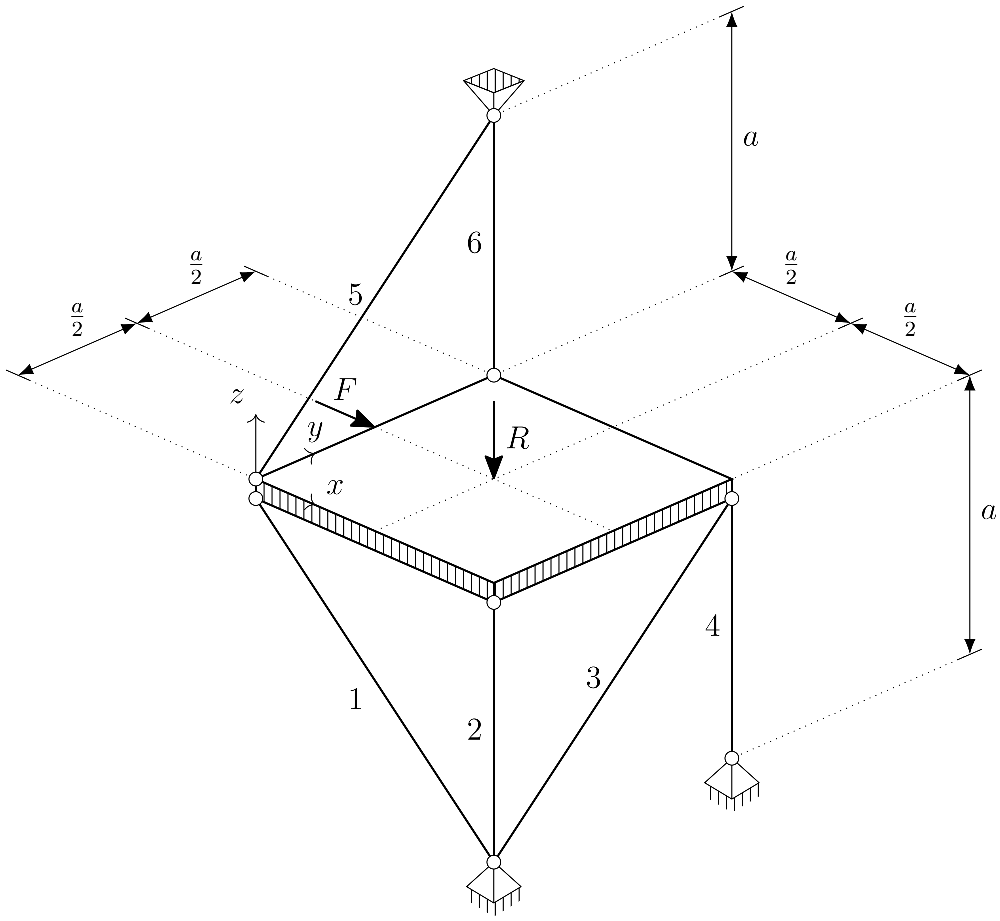
Nullstab
$S_6 = 0$

Knotenpunktverfahren



$$\nearrow: \quad S_2\frac{\sqrt{2}}{2} - S_5 - F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$
$$\Rightarrow S_2 = \frac{12}{5}G + F$$

3. Aufgabe: (ca. 17 % der Gesamtpunkte)



Eine quadratische Platte mit vernachlässigbarer Dicke und der Kantenlänge a wird von insgesamt sechs Stäben gehalten (siehe Abbildung). Die einwirkenden Kräfte können durch das zentrale Kraftsystem ($\boldsymbol{F} = F\,\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{R} = -R\,\boldsymbol{e}_z$) zusammengefasst werden.

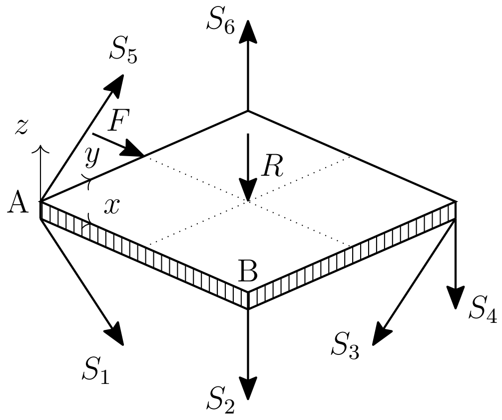
Gegeben: F, $R = 2F$, a.

a) Schneiden Sie das Tragwerk frei und berechnen Sie alle im Tragwerk vorkommenden Stabkräfte.

b) Beurteilen Sie die Lagerung des Tragwerks hinsichtlich der kinematischen Bestimmtheit. Argumentieren Sie mithilfe der Koeffizientenmatrix des in Teilaufgabe a) aufgestellten Gleichungssystems.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Freischnitt:



Gleichgewicht:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad \frac{\sqrt{2}}{2} S_1 + F = 0 \qquad \Rightarrow S_1 = -\sqrt{2} F$$

$$\sum M_{iz}^{\mathrm{A}} = 0: \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} S_3 \cdot a - F \cdot \frac{a}{2} = 0 \qquad \Rightarrow S_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad \frac{\sqrt{2}}{2} S_5 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_3 = 0 \qquad \Rightarrow S_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F$$

$$\sum M_{iy}^{\mathrm{B}} = 0: \quad S_6 \cdot a - \frac{\sqrt{2}}{2} S_1 \cdot a + \frac{\sqrt{2}}{2} S_5 \cdot a - R \cdot \frac{a}{2} = 0 \qquad \Rightarrow S_6 = \frac{1}{2} F$$

$$\sum M_{ix}^{\mathrm{A}} = 0: \quad -S_4 \cdot a - \frac{\sqrt{2}}{2} S_3 \cdot a + S_6 \cdot a - R \cdot \frac{a}{2} = 0 \qquad \Rightarrow S_4 = 0$$

$$\sum F_{iz} = 0: \quad -S_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_3 - S_4 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_5 + S_6 - R = 0 \qquad \Rightarrow S_2 = -\frac{1}{2} F$$

b) Das lineare Gleichungssystem aus Teilaufgabe a) lässt sich in Matrix-Vektor-Schreibweise darstellen:

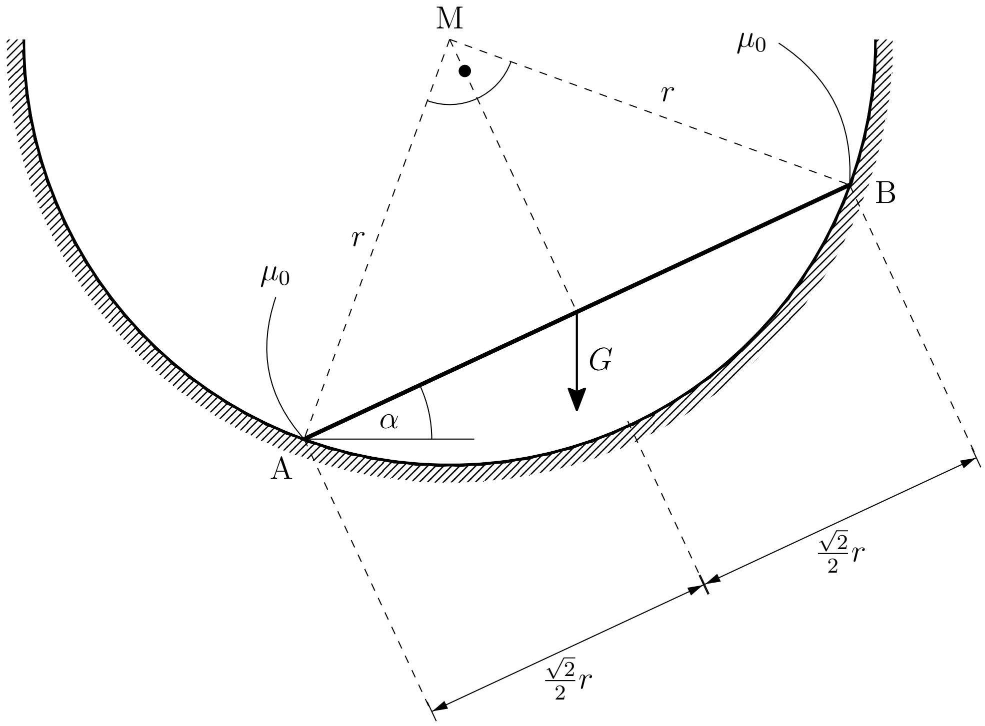
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a & a \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a & -a & 0 & a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -F \\ F \cdot \frac{a}{2} \\ 0 \\ R \cdot \frac{a}{2} \\ R \cdot \frac{a}{2} \\ R \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}.$$

Wie in Teilaufgabe a) gezeigt, kann das lineare Gleichungssystem eindeutig gelöst werden. Dementsprechend gilt für die Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$:

$$\det \boldsymbol{A} \neq 0.$$

Daraus folgt wiederum, dass das Tragwerk kinematisch bestimmt gelagert ist.

4. Aufgabe: (ca. 17 % der Gesamtpunkte)



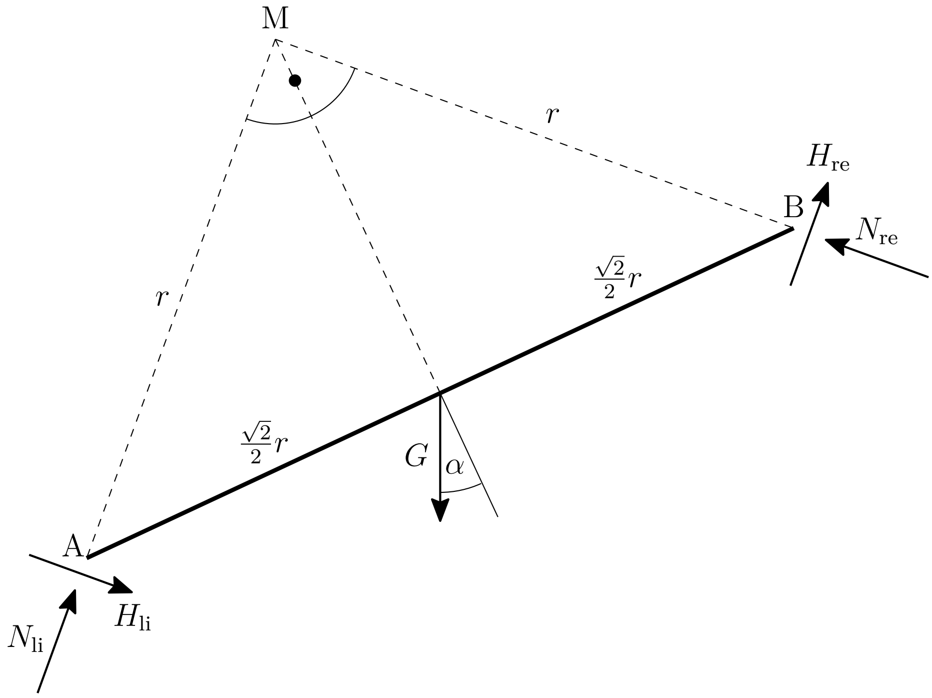
Auf einer halbkreisförmigen Unterlage (Radius r, Mittelpunkt M) liegt ein Stab (Gewichtskraft G, Länge $\sqrt{2}\,r$) unter einem Winkel α gegen die Horizontale. An beiden Auflagerpunkten A und B haftet der Stab an der Unterlage über den Haftkoeffizienten μ_0.

Wie groß darf der Winkel α höchstens sein, damit der Stab nicht rutscht?

Gegeben: r, G, μ_0.

Musterlösung - Aufgabe 4

Freischnitt:



Gleichgewicht:

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{A}}: \quad N_{\text{re}} \cdot r + H_{\text{re}} \cdot r - G\cos(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} r = 0 \qquad (1)$$

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{B}}: \quad -N_{\text{li}} \cdot r + H_{\text{li}} \cdot r + G\cos(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} r = 0 \qquad (2)$$

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{M}}: \quad H_{\text{li}} \cdot r + H_{\text{re}} \cdot r - G\sin(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} r = 0 \qquad (3)$$

Haftbedingungen: $H_{\text{li}} = \mu_0 N_{\text{li}}$ (4), $H_{\text{re}} = \mu_0 N_{\text{re}}$ (5)

Auflösen:

(5) in (1) : $$N_{\text{re}} = \frac{1}{1+\mu_0} G\cos(\alpha)\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (6)$$

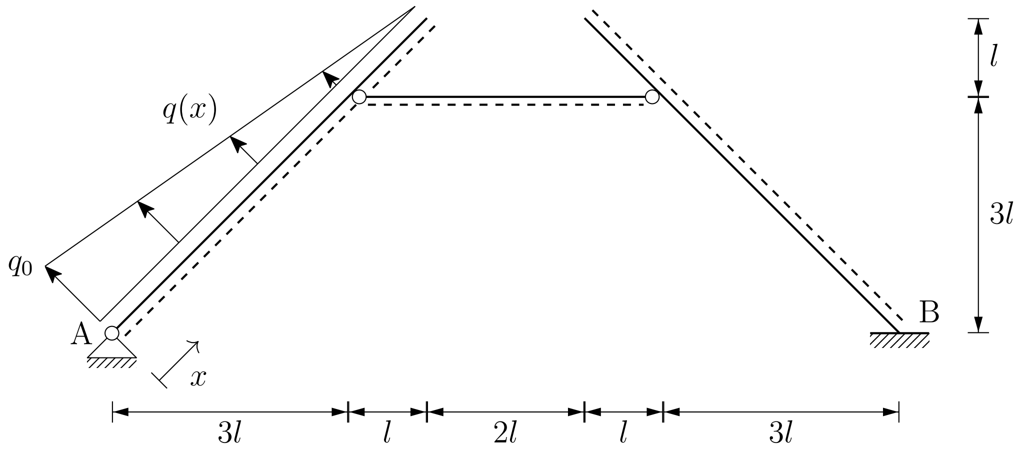
(4) in (2) : $$N_{\text{li}} = \frac{1}{1-\mu_0} G\cos(\alpha)\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (7)$$

(6) und (7) in (3) : $$\frac{\mu_0}{1-\mu_0} G\cos(\alpha)\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\mu_0}{1+\mu_0} G\cos(\alpha)\frac{\sqrt{2}}{2} - G\sin(\alpha)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\mu_0}{1-\mu_0} + \frac{\mu_0}{1+\mu_0} = \frac{\mu_0 + \mu_0^2 + \mu_0 - \mu_0^2}{1-\mu_0^2} = \frac{2\mu_0}{1-\mu_0}$$

$$\Rightarrow \alpha_{\max} = \arctan\left(\frac{2\mu_0}{1-\mu_0}\right)$$

5. Aufgabe: (ca. 32 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte Tragwerk besteht aus drei gewichtsfreien starren Teilkörpern, die über Gelenke miteinander verbunden sind. Das Tragwerk ist in den Punkten A und B gelagert und wird durch eine dreieckförmige Streckenlast $q(x)$ belastet.

Gegeben: l, q_0.

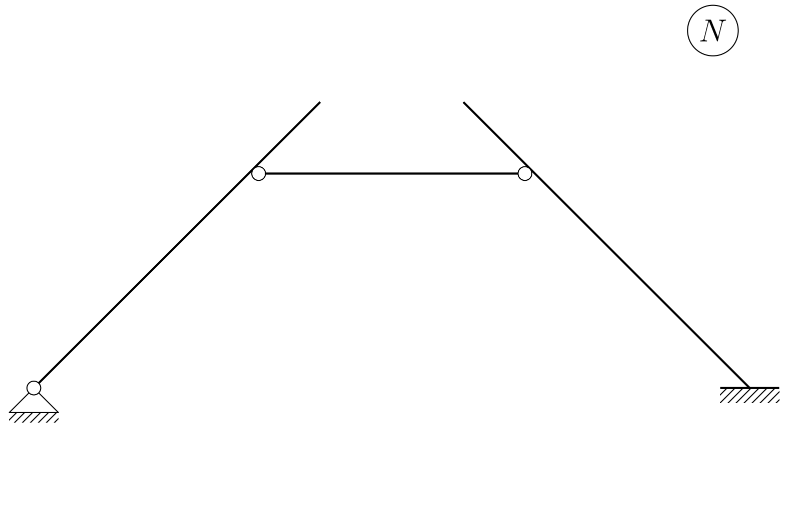
a) Überprüfen Sie, ob die notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit erfüllt ist.

b) Überprüfen Sie mithilfe eines Polplans, ob die hinreichende Bedingung für die statische Bestimmtheit erfüllt ist.

c) Bestimmen Sie alle Auflagerreaktionen.

d) Bestimmen Sie die Funktionsverläufe des Biegemoments und der Querkraft im belasteten Bereich des Tragwerks durch Integration. Verwenden Sie hierfür das vorgegebene Koordinatensystem.

e) Skizzieren Sie unter Angabe der maßgebenden Ordinaten den Normalkraftverlauf für das gesamte System. Verwenden Sie hierfür die nachfolgende Vorlage.

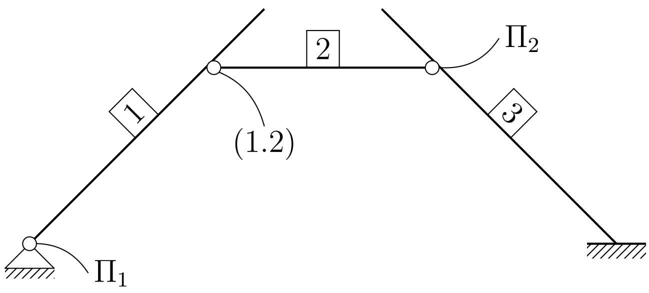


Musterlösung - Aufgabe 5

a) Notwendige Bedingung:

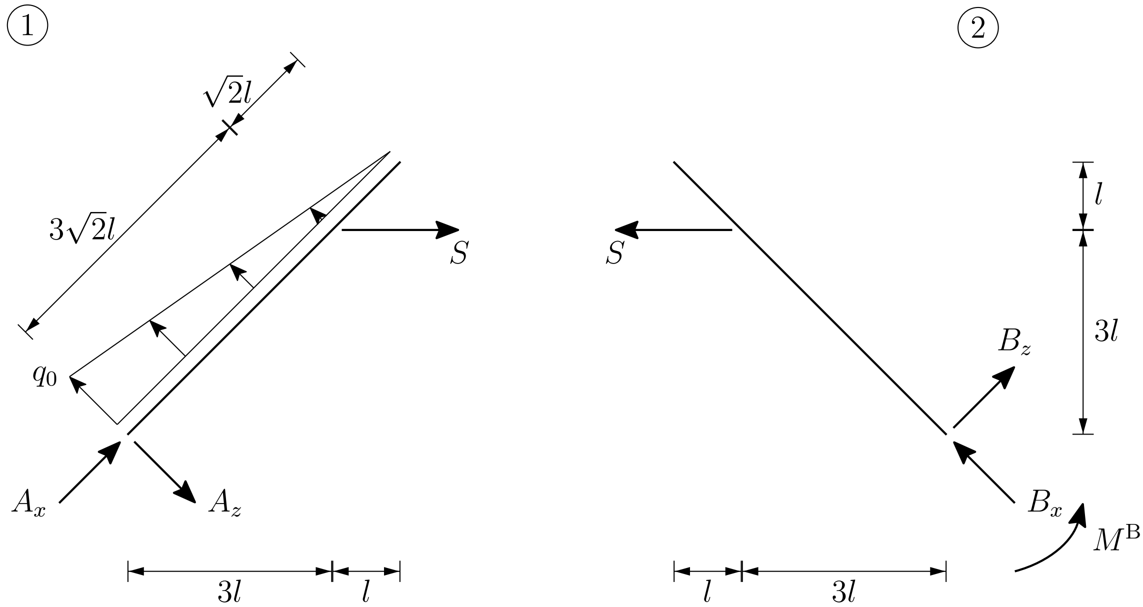
$$\begin{aligned} f &= 3n - (r+v) \\ &= 3 \cdot 2 - (5+1) \\ &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

b)



→ Tragwerksteil 3 ist eingespannt ⇒ unbeweglich.
→ Π_1, Π_2 und (1.2) liegen nicht auf einer Geraden ⇒ Widerspruch im Polplan.
→ Die hinreichende Bedingung für die statische Bestimmtheit ist erfüllt.

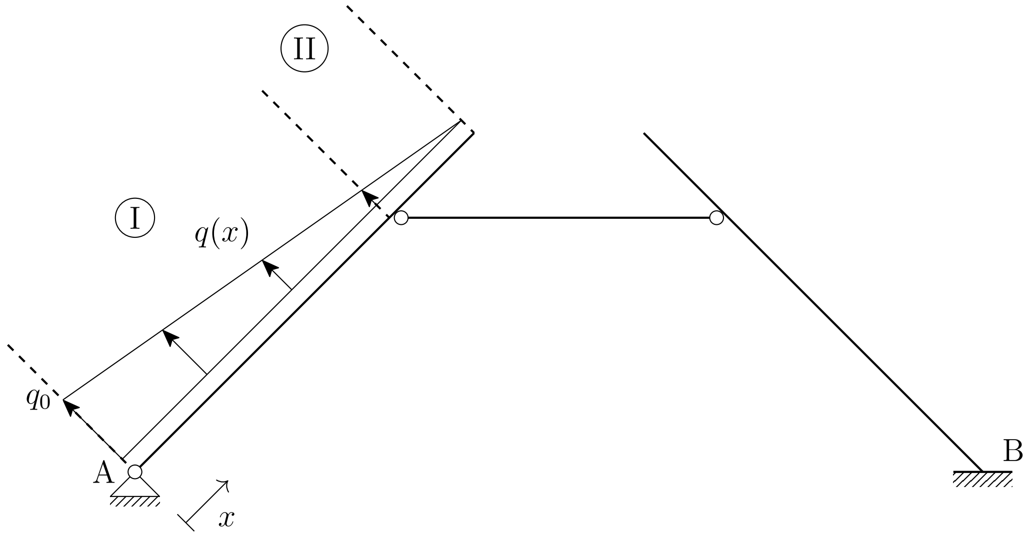
c) Freischnitt:



Gleichgewicht:

$$
\begin{aligned}
&(1): \quad \overset{\curvearrowleft}{\mathrm{A}}: && -S\cdot 3l + \frac{1}{2}q_0 4\sqrt{2}l \cdot \frac{1}{3}4\sqrt{2}l = 0 && \Rightarrow S = \frac{16}{9}q_0 l\\
& \quad \nearrow: && A_x + \frac{\sqrt{2}}{2}S = 0 && \Rightarrow A_x = -\frac{8\sqrt{2}}{9}q_0 l\\
& \quad \nwarrow: && -A_z - \frac{\sqrt{2}}{2}S + \frac{1}{2}q_0 4\sqrt{2}l = 0 && \Rightarrow A_z = \frac{10\sqrt{2}}{9}q_0 l\\
&(2): \quad \overset{\curvearrowleft}{\mathrm{B}}: && M^{\mathrm{B}} + S\cdot 3l = 0 && \Rightarrow M^{\mathrm{B}} = -\frac{16}{3}q_0 l^2\\
& \quad \nearrow: && B_z - \frac{\sqrt{2}}{2}S = 0 && \Rightarrow B_z = \frac{8\sqrt{2}}{9}q_0 l\\
& \quad \nwarrow: && B_x + \frac{\sqrt{2}}{2}S = 0 && \Rightarrow B_x = -\frac{8\sqrt{2}}{9}q_0 l
\end{aligned}
$$

d)



$$q(x) = \frac{q_0}{4\sqrt{2}l}x - q_0$$

Bereich (I):

$$
\begin{aligned}
Q^{\mathrm{I}}(x) &= -\int q(x)\,\mathrm{d}x + C_1 = -\frac{q_0}{8\sqrt{2}l}x^2 + q_0 x + C_1\\
M^{\mathrm{I}}(x) &= \int Q^{\mathrm{I}}(x)\,\mathrm{d}x + C_2 \ = -\frac{q_0}{24\sqrt{2}l}x^3 + \frac{1}{2}q_0 x^2 + C_1 x + C_2
\end{aligned}
$$

Bereich (II):

$$
\begin{aligned}
Q^{\mathrm{II}}(x) &= -\frac{q_0}{8\sqrt{2}l}x^2 + q_0 x + C_3\\
M^{\mathrm{II}}(x) &= -\frac{q_0}{24\sqrt{2}l}x^3 + \frac{1}{2}q_0 x^2 + C_3 x + C_4
\end{aligned}
$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
&Q^{\mathrm{I}}(x=0) = -A_z = -\frac{10\sqrt{2}}{9}q_0 l && \Rightarrow C_1 = -\frac{10\sqrt{2}}{9}q_0 l \\
&M^{\mathrm{I}}(x=0) = 0 && \Rightarrow C_2 = 0 \\
&Q^{\mathrm{II}}(x=4\sqrt{2}l) = 0 && \Rightarrow C_3 = -2\sqrt{2}q_0 l \\
&M^{\mathrm{II}}(x=4\sqrt{2}l) = 0 && \Rightarrow C_4 = \frac{16}{3}q_0 l^2
\end{aligned}$$

Funktionsgleichungen der Schnittgrößen:

$$Q(x) = \begin{cases} -\dfrac{q_0}{8\sqrt{2}l}x^2 + q_0 x - \dfrac{10\sqrt{2}}{9}q_0 l & \text{für } 0 \le x < 3\sqrt{2}l \\ -\dfrac{q_0}{8\sqrt{2}l}x^2 + q_0 x - 2\sqrt{2}q_0 l & \text{für } 3\sqrt{2}l < x \le 4\sqrt{2}l \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} -\dfrac{q_0}{24\sqrt{2}l}x^3 + \dfrac{1}{2}q_0 x^2 - \dfrac{10\sqrt{2}}{9}q_0 l x & \text{für } 0 \le x < 3\sqrt{2}l \\ -\dfrac{q_0}{24\sqrt{2}l}x^3 + \dfrac{1}{2}q_0 x^2 - 2\sqrt{2}q_0 l x + \dfrac{16}{3}q_0 l^2 & \text{für } 3\sqrt{2}l \le x \le 4\sqrt{2}l \end{cases}$$

e)