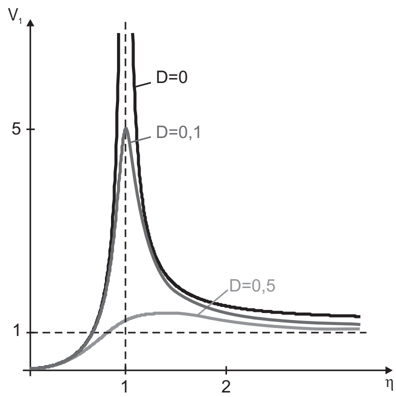
1. Aufgabe: (ca. 14% der Gesamtpunkte)

a) Geben Sie Amplitude, Frequenz und Phasenverschiebung der Schwingung

$$x(t) = 3\sin(8\pi t) + 4\cos(8\pi t)$$

an.

b) Gegeben ist der Verlauf der Vergrößerungsfunktion V_1 für Unwuchterregung und verschiedene Dämpfungsmaße D.
Erläutern Sie, weshalb die Vergrößerungsfunktion V_1 für alle Dämpfungsmaße D bei $\eta = 0$ eine Nullstelle hat.

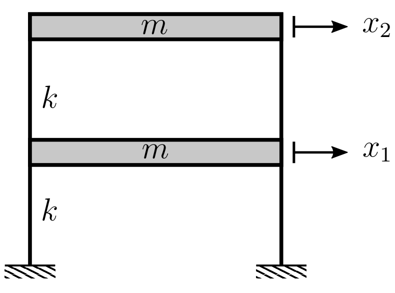


c) Weshalb wird die Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{D}$ der allgemeinen linearen Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{D}\,\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(t)$$

in der Baudynamik üblicherweise nicht explizit mit Dämpfungselementen modelliert? Gehen Sie mit Ihrer Antwort sowohl auf die Entkopplung der Gleichungen als auch auf die Verteilung von Dämpfern in Gebäuden ein.

d) Gegeben sei der dargestellte Stockwerkrahmen und die zugehörige Bewegungsgleichung.



$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Schätzen Sie die erste Eigenfrequenz des Systems mit Hilfe des Rayleighkoeffizienten ab. **Begründen** Sie Ihre Wahl des genäherten Eigenvektors.

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Amplitude: $A = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Frequenz: $\omega = 8\pi \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 4$ insg.

Phasenverschiebung: $\varphi = \arctan\left(\dfrac{3}{4}\right)$

b) $\eta = \dfrac{\Omega}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \eta = 0 \Leftrightarrow \Omega = 0$

$\Rightarrow \eta = 0$ bedeutet, dass die Unwucht ruht ($\Omega = 0$), weshalb es keinen Ausschlag gibt ($V_1 = 0 \Rightarrow$ Partikulärlösung verschwindet).

c)
- Entkopplung des Systems in n modale Freiheitsgrade ist nur bei sehr spezieller Struktur der Dämpfungsmatrix (lineare Abhänigkeit von $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{M}$) möglich.
- Modellierung der Dämpfung schwierig da in realen Bauwerken keine konzentrierten viskosen Dämpfer auftreten.

d) Wähle z.B. $\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ als Näherung für den 1. Eigenvektor. Begründung: gleichsinnge Verformung für 1. Eigenform (gleiches VZ), Annahme linearer Verformung des Rahmens.

$$R = \frac{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} m & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} = \frac{2}{5} \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \omega_1 \leq \sqrt{\frac{2}{5} \frac{k}{m}}$$

2. Aufgabe: (ca. 14% der Gesamtpunkte)

Betrachtet wird eine Schwingung welche der $2\,\pi$-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} f(t) = t^2 & \text{für } t \in [-\pi, \pi) \\ f(t + 2\,\pi) = f(t) & \text{für } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

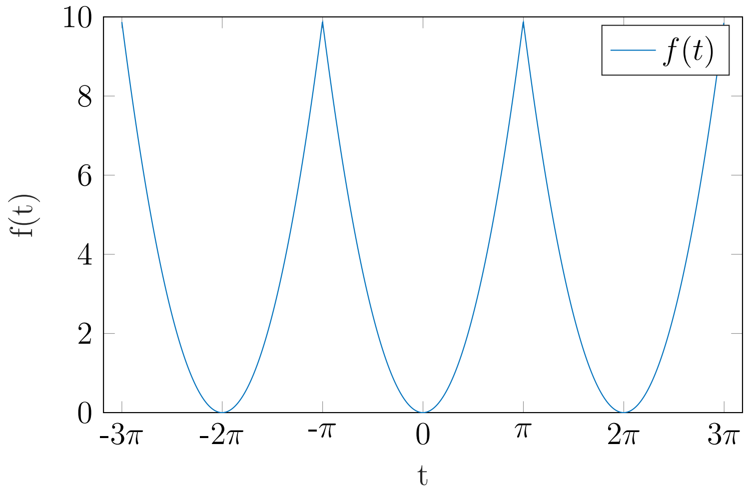
genügt.

a) Skizzieren Sie die Funktion auf dem Intervall $[-3\,\pi, 3\,\pi]$.

b) Stellen Sie die Integrale zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten von $f(t)$ auf. Begründen Sie welche Fourierkoeffizienten Null und welche Fourierkoeffizienten von Null verschieden sind? **Berechnung nicht erforderlich!**

Musterlösung - Aufgabe 2

a) Skizze



b) $f(t)$ ist eine gerade Fkt. $f(t) = f(-t)\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{f(t)}_{\text{gerade}}\ \mathrm{d}t \neq 0$$

Integral über gerade Fkt. ist $\neq 0$ bzw. siehe Flächeninhalt Skizze

$$a_k = C_k = \frac{2}{T}\int_0^T \underbrace{f(t)}_{\text{gerade}}\ \underbrace{\cos(k\,\omega\,t)}_{\text{gerade}}\ \mathrm{d}t \neq 0$$

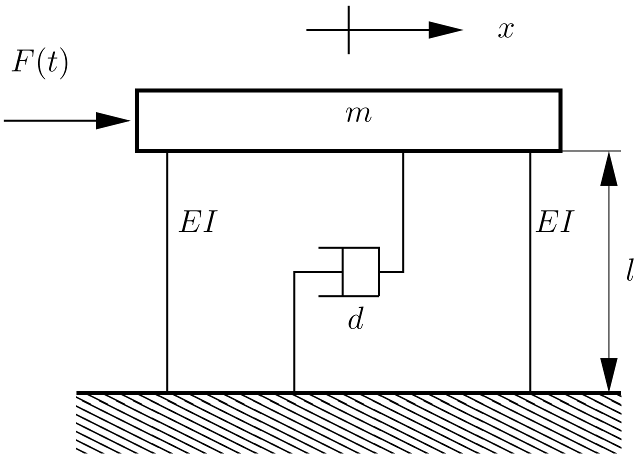
gerade mal gerade Fkt. ergibt gerade Fkt.; Integral über gerade Fkt. ist $\neq 0$

$$b_k = S_k = \frac{2}{T}\int_0^T \underbrace{f(t)}_{\text{gerade}}\ \underbrace{\sin(k\,\omega\,t)}_{\text{ungerade}}\ \mathrm{d}t = 0$$

gerade mal ungerade Fkt. ergibt ungerade Fkt.; Integral über ungerade Fkt. ist $= 0$

3. Aufgabe: (ca. 31% der Gesamtpunkte)

Gegeben ist der abgebildete Ein-Massen-Schwinger (z.B. Gebäude) bestehend aus zwei masselosen, dehnsteifen Balken ($\rho = 0, EA \to \infty, EI, l$), einer Masse m und einem Dämpfer d. Ferner greift an der Masse eine Last (z.B. Windlast) an, gegeben durch $F(t) = F_0 \cos(\Omega\, t)$. Es soll angenommen werden, dass sich die Masse m nur in horizontaler Richtung verschiebt.



Gegeben: EI, l, m, d, F_0, Ω.

a) Skizzieren Sie ein eindimensionales Ersatzmodell des Systems und bestimmen Sie die Ersatzfedersteifigkeit k des gesamten Systems.

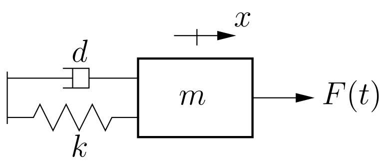
b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Systems für die Koordinate x durch die synthetische Methode (Freischnitt/Newtonsche Axiome).

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für ein Dämpfungsmaß $0 < D < 1$.

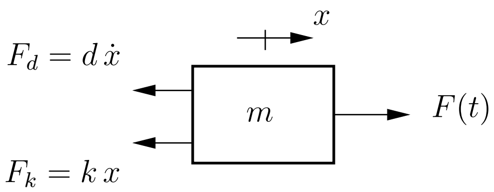
d) Es soll Windstille angenommen werden, so dass $F(t) = 0$. Bestimmen Sie für dieses System die spezielle Lösung mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Ersatzmodell mit Ersatzfedersteifigkeit $k = 2\,k_i = 2\,\frac{12\,EI}{l^3} = \frac{24\,EI}{l^3}$



b) FKB



Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{x} + d\,\dot{x} + k\,x = F(t) = F_0\,\cos(\Omega\,t)$$

c) Normalform

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = \frac{F(t)}{m} = F_0\,\cos(\Omega\,t)$$

Allgemeine Lsg.

$$x_a = x_h + x_p$$

Homogene Lsg.

$$x_h = e^{-\omega_0\,t\,D}\,(A\,\sin(\omega_d\,t) + B\,\cos(\omega_d\,t)) = e^{-\omega_0\,t\,D}\,C\,\cos(\omega_d\,t - \alpha), \quad \omega_d = \sqrt{1-D^2}\,\omega_0$$

bzw. in Eigenzeit $\tau = \omega_0\,t$:

$$x_h = e^{-\tau\,D}\,(A\,\sin(\nu\,\tau) + B\,\cos(\nu\,\tau)) = e^{-\tau\,D}\,C\,\cos(\nu\,\tau - \alpha), \quad \nu = \sqrt{1-D^2}$$

Partikuläre Lsg. Dimensionslose Darstellung mit Eigenzeit $\tau = \omega_0\,t$, $\frac{d}{m\,\omega_0} = 2\,D$, $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$

$$x'' + 2\,D\,x' + x = \underbrace{\frac{F_0}{\omega_0^2\,m}}_{=F_0/k=x_0}\,\cos(\eta\,\tau)$$

Partikuläre Lösung (Ansatz in Form der rechten Seite)

$$x_p = C_p\,\cos(\eta\,\tau - \gamma) = C_p\,\cos(\Omega\,t - \gamma),$$

für Krafterregung gilt

$$C_p = x_0\,V = x_0\,V_1 = x_0\,\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\,D^2\,\eta^2}}, \quad \gamma = \arctan(\frac{2\,D\,\eta}{1-\eta^2})$$

d) Spezielle Lsg. für $x_a = x_h = e^{-\omega_0\,D\,t}\,(A\,\sin(\omega_d\,t) + B\,\cos(\omega_d\,t))$

$$x_a(0) = B = 0$$
$$\dot{x}_a(0) = -\omega_0\,B + \omega_d\,A = v_0 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{v_0}{\omega_d}$$

Alternative Lsg. für $x_a = x_h = e^{-\omega_0 D t} C \cos(\omega_d t - \alpha)$

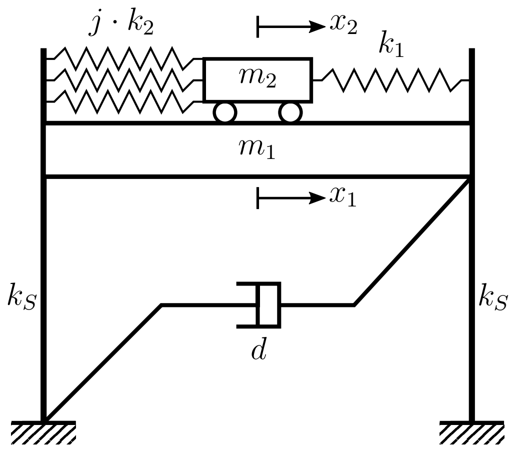
$$x_a(0) = C \cos(-\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{\pi}{2}$$
$$\dot{x}_a(0) = -\omega_d C \sin(-\frac{\pi}{2}) = v_0 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{v_0}{\omega_d}$$

In beiden Fällen ergibt sich

$$x_a = \frac{v_0}{\omega_d} e^{-\omega_0 D t} \underbrace{\cos(\omega_d t + \frac{\pi}{2})}_{\sin(\omega_d t)}$$

4. Aufgabe: (ca. 41% der Gesamtpunkte)

Der skizzierte Stockwerkrahmen (einstöckiges Gebäude mit Schwingungstilger) besteht aus einem starren Riegel mit Masse m_1, masselosen Stielen mit Ersatzsteifigkeit k_S je Seite und einem Dämpfer mit Dämpfungskonstante d. Der aufgesetzte Schwingungstilger mit Masse m_2 ist durch eine Feder der Steifigkeit k_1 und zusätzlich einem Federpaket mit $j > 0$ Federn der Steifigkeit k_2 mit dem Rahmen verbunden. Es soll angenommen werden, dass sich m_1 und m_2 nur horizontal verschieben können. Die Verschiebungen werden mittels der ortsfesten Koordinaten x_1 und x_2 beschrieben.



Gegeben: m_1, m_2, k_1, k_2, k_S, d, m, k.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems mit Hilfe des Lagrange Formalismus 2. Art in Vektor-Matrix-Schreibweise auf.

b) Liegt durchdringende Dämpfung vor? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe einer Eigenwertanalyse der Dämpfungsmatrix (Hinweis: Die Eigenvektoren müssen nicht untersucht werden).

Im Folgenden wird das ungedämpfte System ($d = 0$) untersucht und es werden vereinfachende Annahmen getroffen, so dass von folgender Bewegungsgleichung ausgegangen werden kann:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (6+j)k & -jk \\ -jk & jk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

c) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_i des Systems in Abhängigkeit von j.

d) Berechnen Sie die zulässige Anzahl an zusätzlichen Federn j, so dass für alle Eigenkreisfrequenzen $1.4\,\mathrm{s}^{-1} \leq \omega_i \leq 3.6\,\mathrm{s}^{-1}$ gilt. Dabei darf $k = 1\,\mathrm{kN/m}$ und $m = 1000\,\mathrm{kg}$ angenommen werden.

e) Ermitteln Sie für $j = 4$ die entkoppelten Bewegungsgleichungen. Nutzen Sie dazu die Normierungsbedingung $\boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi}_i = 5m$ und geben Sie die Modalmatrix sowie die modale Steifigkeits- und Massenmatrix an.

Musterlösung - Aufgabe 4

a)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\ R &= \frac{1}{2}d\dot{x}_1^2 \\ V &= \frac{1}{2}2k_S x_1^2 + \frac{1}{2}(k_1 + jk_2)(x_1 - x_2)^2 \end{aligned}$$

Lagrange Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) &= \begin{bmatrix} m_1\ddot{x}_1 \\ m_1\ddot{x}_1 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{x}} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 2k_S x_1 + (k_1 + jk_2)(x_1 - x_2) \\ (k_1 + jk_2)(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} &= \begin{bmatrix} d\dot{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2k_S + k_1 + jk_2 & -k_1 - jk_2 \\ -k_1 - jk_2 & k_1 + jk_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

b)

$$\det(\boldsymbol{C} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (d - \lambda)\lambda = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = d,\ \lambda_2 = 0$$

$\Rightarrow$ Notwendige Bedingung für durchdringende Dämpfung erfüllt ($\boldsymbol{C}$ ist semi-positiv-definit, $\lambda_i \geq 0$). Außerdem: Kopplung in $\boldsymbol{K}$.
$\Rightarrow$ Durchdringend gedämpft.

c)

$$\begin{aligned} &\det(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &\left(k(6 + j) - \omega^2 m\right)\left(kj - \omega^2 m\right) - j^2k^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &\omega^4 - (6 + 2j)\frac{k}{m}\omega^2 + 6j\frac{k^2}{m^2} \\ \Rightarrow \quad &\omega_{1,2}^2 = \left[3 + j \pm \sqrt{3^2 + j^2}\right]\underbrace{\frac{k}{m}}_{=s^{-2}} \end{aligned}$$

d) 1) $\omega_1 \geq 1.4s^{-1}$:

$$\begin{aligned} &\omega_1 \geq 1.4s^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_1^2 \geq 1.4^2 s^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad 3 + j - \sqrt{3^2 + j^2} \geq 1.96 \\ \Leftrightarrow \quad &9 + j^2 \leq (j + 1.04)^2 = j^2 + 2.08j + 1.0816 \\ \Leftrightarrow \quad &j \geq 3.81 \qquad \Rightarrow \text{ Mindestens 4 Federn erforderlich} \end{aligned}$$

2) $\omega_2 \leq 3.6s^{-1}$:

$$\begin{aligned} \omega_1 \leq 3.6s^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad \omega_2^2 \leq 3.6^2 s^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad 3 + j + \sqrt{3^2 + j^2} \leq 12.96 \\ &\Leftrightarrow \quad 9 + j^2 \leq (9.96 - j)^2 = j^2 - 19.92j + 9.96^2 \\ &\Leftrightarrow \quad j \leq 4.52 \qquad \Rightarrow \text{ Maximal 4 Federn zulässig} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nur für $j = 4$ gilt $1.4\,\mathrm{s}^{-1} \leq \omega_i \leq 3.6\,\mathrm{s}^{-1}$

e) $j = 4$:

$$\omega_1 = \sqrt{2\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{12\frac{k}{m}}$$

$$\kappa_i = -\frac{k_{11} - \omega_i^2 m_{11}}{k_{12} - \omega_i^2 m_{12}} = \frac{10k - \omega_i^2 m}{4k - 0} \quad \Rightarrow \quad \kappa_1 = 2, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{2}$$

Eigenvektoren und normierte Eigenvektoren:

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_1 = a_1 \boldsymbol{\phi}, \quad \text{Normierung:} \quad \boldsymbol{\Phi}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi}_1 = a_1^2 5m \stackrel{!}{=} 5m \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1$$

$$\boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_2 = a_2 \boldsymbol{\phi}, \quad \text{Normierung:} \quad \boldsymbol{\Phi}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi}_1 = a_2^2 \frac{5}{4} m \stackrel{!}{=} 5m \quad \Rightarrow \quad a_2 = 2$$

Modalmatrix, modale Steifigkeits- und Massenmatrix

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 24 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} k = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} k$$

$$\tilde{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} m$$

Entkoppelte Bew.-Gl. in modalen Koordinaten $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{x}$:

$$\tilde{\boldsymbol{M}} \ddot{\boldsymbol{q}} + \tilde{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{q}_1 + 2\frac{k}{m} q_1 = 0, \quad \ddot{q}_2 + 12\frac{k}{m} q_2 = 0$$